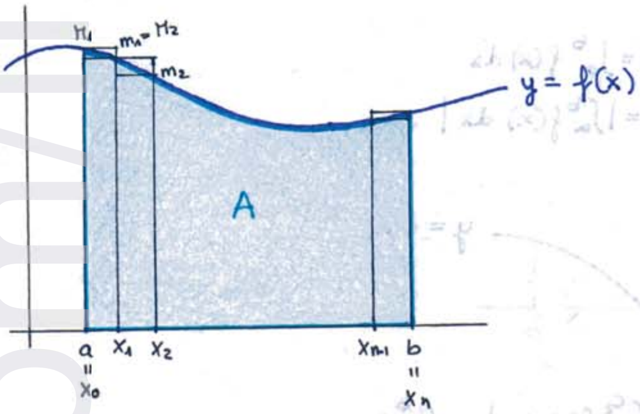
6. INTEGRACIÓN

6.1. Integral definida: El problema del área. Integral de Riemann. Propiedades elementales.



A = "área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$".

$a, b \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función
$\quad x \to f(x)$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

f acotada en $[a, b]$

A = Área del recinto limitado por: $\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$:

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\} \text{ con } \underset{a}{\overset{}{x_0}} < x_1 < \dots < x_{n-1} < \underset{b}{x_n}$$

$$\forall i = 1, \dots, n \begin{cases} m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases}$$

- Suma superior: $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, |x_i - x_{i-1}|$
- Suma inferior: $I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, |x_i - x_{i-1}|$

$\Big\}\ I(f, P) \leq A \leq S(f, P).$

Integral de Riemann

f es integrable (Riemann-integrable) en $[a,b] \Leftrightarrow$

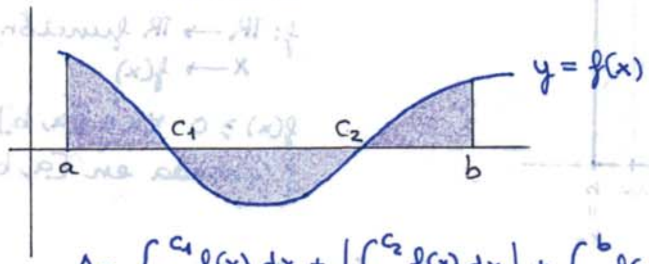
$\Leftrightarrow \inf \{S(f,P) \mid P \text{ partición de } [a,b]\} = \sup \{I(f,P) \mid P \text{ partición de } [a,b]\} =$

$= \int_a^b f(x)\,dx$ y es $\int_a^b f(x)\,dx = A$.

si $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow A = \int_a^b f(x)\,dx$

si $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

sino



$$A = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx\right| + \int_{c_2}^{b} f(x)\,dx.$$

Propiedades elementales

hipótesis: $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
f acotada en $[a,b]$.

1. f tiene un número finito de puntos de discontinuidad (evitable o de salto finito) en $[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.

   1'. Consecuencia: f continua en $[a,b] \Rightarrow f$ integrable en $[a,b]$.

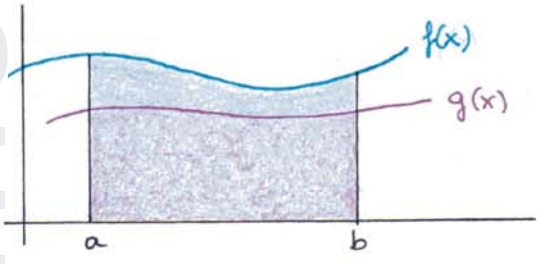
2. f es monótona (creciente o decreciente) en $[a,b] \Rightarrow f$ es integrable en $[a,b]$.

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

   3'. Consecuencia: $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

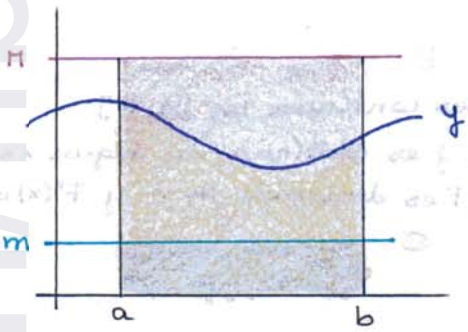
4. f integrable en $[a,b] \Rightarrow \forall c \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

5. $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b] \\ f, g \text{ integrables en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.



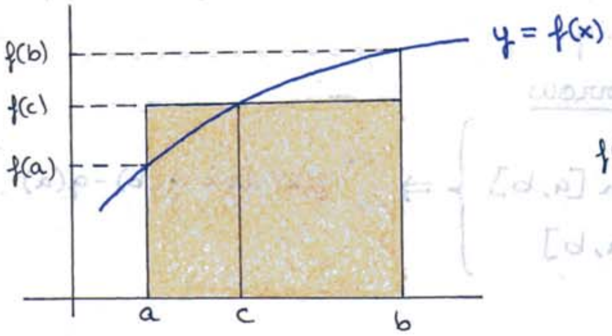
6. $\left.\begin{array}{l} f \text{ integrable en } [a,b] \\ m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

cota inferior (m) — cota superior (M)



7. Teorema del valor medio

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continua en } [a,b] \\ m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \\ M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tq. } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$



$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

"media" o "valor intermedio" de f en $[a,b]$.

8. f, g integrables en $[a,b] \Rightarrow f+g$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

9. $\left.\begin{array}{l} f \text{ integrable en } [a,b] \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

10. f integrable en $[a,b] \Rightarrow |f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

6.2. Integral indefinida: Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Funciones definidas por integrales. Integrales definidas: Áreas y volúmenes.

Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b. \\ f \text{ integrable en } [a,b] \\ F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1.\ F \text{ es contínua en } [a,b] \\ 2.\ \text{si } f \text{ es contínua en algun } x \in [a,b] \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow F \text{ es derivable en } x \text{ y } F'(x) = f(x). \end{array}$$

Corolario 1

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \text{① } \forall x \in [a,b]\ F \text{ es contínua en } x \text{ y } F'(x) = f(x).$$

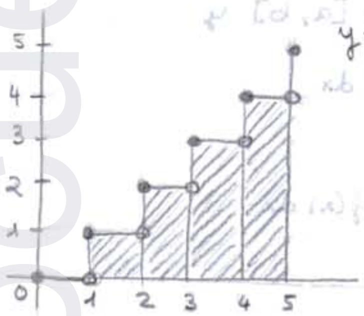
$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

si f contínua para $x > a$.

Corolario 2: Regla de Barrow

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ g \text{ contínua y derivable en } [a,b] \\ \quad \text{t.q. } g'(x) = f(x)\ \ \forall x \in [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a).$$

1. Proveu que la funció $y = E[x]$ es integrable en $[0,5]$ i calculeu $\int_0^5 E[x]\,dx$.



$y = E[x]$ tiene seis puntos de discontinuidad en $[0,5] \Rightarrow$ es integrable en $[0,5]$.

$$\int_0^5 E[x]\,dx = \int_0^1 E[x]\,dx + \int_1^2 E[x]\,dx + \int_2^3 E[x]\,dx + \int_3^4 E[x]\,dx + \int_4^5 E[x]\,dx =$$

$$= [0x]_0^1 + [1x]_1^2 + [2x]_2^3 + [3x]_3^4 + [4x]_4^5 =$$

$$= (0-0) + (2-1) + (2\cdot 3 - 2\cdot 2) + (3\cdot 4 - 3\cdot 3) + (4\cdot 5 - 4\cdot 4) =$$

$$= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \boxed{10\, u^2}$$

2. Calculeu la derivada de:

a) $f(x)=\int_3^x \sin \ln t \, dt$, $x>3$.

$\boxed{f'(x)=\sin \ln x}$

TFC.
$\sin \ln t$ es contínua $\forall t>3$.

Funciones definidas por integrales

② $G(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt \longrightarrow G'(x)=\left(F(g(x))\right)'=F'(g(x))\cdot g'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

$\quad = F(g(x))$

f contínua para $x>a$, g derivable. — regla de la cadena — TFC

2. Calculeu la derivada de:

c) $h(x)=\int_0^{\ln x} \sin t^3 \, dt$, $x>0$

$h'(x)=(\sin(\ln x)^3)\cdot \frac{1}{x}=\boxed{\frac{\sin(\ln^3 x)}{x}}$

③ $G_2(x)=\int_x^a f(t)\,dt=-\int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow G_2'(x)=-f(x)$

f contínua para $x>a$

④ $G_3(x)=\int_{g(x)}^a f(t)\,dt=-\int_a^{g(x)} f(t)\,dt \Rightarrow G_3'(x)=-f(g(x))\cdot g'(x)$

⑤ $G_4(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt \Rightarrow G_4'(x)=f(g_2(x))\cdot g_2'(x)-f(g_1(x))\cdot g_1'(x)$.

f contínua
g_1, g_2 derivable

2. Calculeu la derivada de:

b) $g(x)=\int_x^{10} \sin \ln t \, dt$, $x>0$.

$=-\int_{10}^x \sin \ln t \, dt \Rightarrow \boxed{g'(x)=-\sin(\ln x)}$

TFC
$\sin \ln t$ contínua $\forall x>0$.

d) $s(x) = \int_{x^2+3x}^{x^4+2x+1} e^{\sin t}\, dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{s'(x) = e^{\sin(x^4+2x+1)} \cdot (4x^3+2) - e^{\sin(x^2+3x)} \cdot (2x+3)}$$

TFC
regla de la cadena
$e^{\sin t}$ contínua en todo $\mathbb{R}$
(x^4+2x+1) y (x^2+3x) son derivables en todo $\mathbb{R}$.

3. Calculeu els límits:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin\sqrt{x^2})\cdot 2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} = \frac{2}{3} \lim \frac{\sin x}{x} =$$

$\frac{0}{0}$. Regla de L'Hôpital.
numerador i denominador són derivables en un entorno de 0.
numerador: $\sin\sqrt{x}$ es contínua $\forall x \geq 0$
x^2 es derivable en $\forall x$
denominador: polinomio.

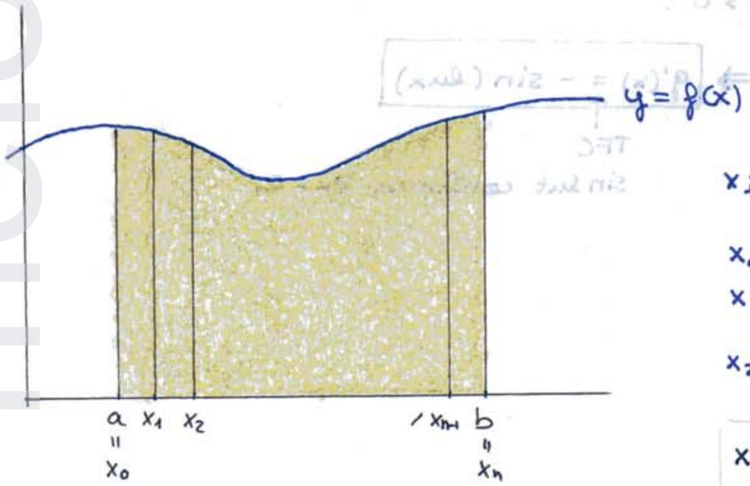
$\frac{0}{0}$. Regla de L'Hôpital.
numerador i denominador son derivables en todo $\mathbb{R}$.

$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{2}{3}\cdot 1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

6.3. Integración aproximada: Regla / fórmula / método de los trapecios. Fórmula / regla / método de Simpson. Fórmula del error.

calcular $\int_a^b f(x)\, dx$ de forma aproximada sin utilizar la primitiva de $f(x)$.
hipótesis: $f(x)$ acotada en $[a,b]$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

si f es dos veces derivable en $[a,b]$ (trapecios)
si f es cuatro veces derivable en $[a,b]$ (Simpson)
$\Rightarrow$ fórmula del error que permite acotarlo



$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a$

$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}$

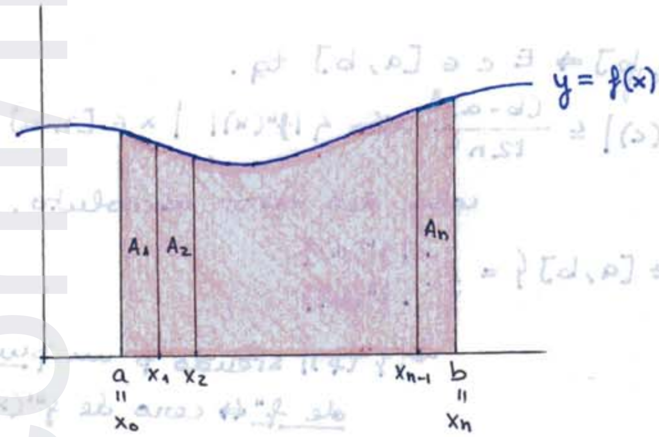
$$\boxed{x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}}$$

Regla / método / fórmula de los trapecios

$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Sea f una función continua en $[a,b]$,

calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ de forma aproximada.



$A = \int_a^b f(x)\,dx$

$P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$

con $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

$x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, el trapecio está determinado por:

$$\begin{cases} (x_{i-1}, 0) \quad (x_i, 0) \\ (x_{i-1}, f(x_{i-1})) \quad (x_i, f(x_i)) \\ (x_{i-1}, 0), \quad (x_{i-1}, f(x_{i-1})) \\ (x_i, 0), \quad (x_i, f(x_i)) \end{cases}$$

Área de un trapecio: $A = \frac{B+b}{2}h$

Sea $h = \frac{b-a}{n}$, $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot \frac{b-a}{n} =$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)}{2} + \underbrace{\frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2}} + \underbrace{\frac{f(x_2)}{2} + \ldots} + \underbrace{\frac{f(x_{n-1})}{2}} + \frac{f(x_n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\underset{\frac{f(a)}{2}}{\frac{f(x_0)}{2}} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \underset{\frac{f(b)}{2}}{\frac{f(x_n)}{2}}\right)$$

$\int_a^b f(x)\,dx \simeq T(n)$

$$\boxed{T(n) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right)} = h\cdot\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Fórmula del error absoluto

si f es dos veces derivable en $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ tq.

tq. $\left|\int_a^b f(x)dx - T(n)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,|f''(c)| \leq \underbrace{\boxed{\frac{(b-a)^3}{12n^2}\, \text{máx}\{|f''(x)| \mid x \in [a,b]\}}}_{\text{cota del error absoluto.}}$

para hallar el $\text{máx}\{|f''(x)|\mid x\in[a,b]\} =$ $|f''(a)|$ / $|f''(b)|$ / $|f''(p)|$ siendo p un punto crítico de $f'' \Leftrightarrow$ cero de $f'''(x)$.

si sabemos que $M_2 \geq \text{máx}\{|f''(x)| \mid x\in[a,b]\} \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx - T(n)\right| \leq \underbrace{\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2}_{\text{cota del error.}}$

12\. Calculeu la integral: $I = \int_0^4 (1-e^{\frac{x}{4}})\,dx$.

a) Fent ús de la regla de Barrow.

$$\int_0^4 (1-e^{\frac{x}{4}})\,dx = \left[x - 4e^{\frac{x}{4}}\right]_0^4 = \left(4-4e^{\frac{4}{4}}\right) - \left(0-4e^{\frac{0}{4}}\right) =$$

$$= 4 - 4e^1 - \cancel{0} + 4e^0 = 4 - 4e + 4\cdot 1 = \boxed{8-4e}$$

b) Fent ús del la fórmula dels trapezis amb una partició de 4 subintervals.

$n = 4$

$x_0 = a = 0$

$x_1 = a + 1\cdot\frac{b-a}{n} = 0 + \frac{4-0}{4} = 1$

$x_2 = a + 2\cdot\frac{b-a}{n} = 0 + 2\cdot\frac{4-0}{4} = 2\cdot 1 = 2$

$x_3 = a + 3\cdot\frac{b-a}{n} = 0 + 3\cdot\frac{4-0}{4} = 3\cdot 1 = 3$

$x_4 = b = 4$.

$$T(4) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) =$$

$$= \frac{4-0}{4}\left(\frac{(1-e^{\frac{0}{4}}) + (1-e^{\frac{4}{4}})}{2} + (1-e^{\frac{1}{4}}) + (1-e^{\frac{2}{4}}) + (1-e^{\frac{3}{4}})\right) =$$

$$= -2'9088876\ldots$$

d) Avaluen l'error absolut en cas que fem ús del resultat de l'apartat (b) per aproximar el valor de la integral I.

$$|I - T(4)| = |(8-4e) - (-2'9089)| = 0'035760304\ldots < 0'05.$$

e) Calculen la cota superior de l'error absolut que es comet en el càlcul de l'apartat (b).

$$\text{cota error: } \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{(4-0)^3}{12\cdot 4^2}\cdot M_2 = \frac{\cancel{4}^{\cancel{3}}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{4^2}}\cdot M_2 = \frac{M_2}{3}$$

$$f(x) = 1 - e^{\frac{x}{4}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{16}e^{\frac{x}{4}}$$

1º $f'''(x) = -\frac{1}{64}e^{\frac{x}{4}}$

2º Càlcul del máx $\{ |f(x)| \mid x \in [x,4] \}$

$$f'''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{64}e^{\frac{x}{4}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{4}} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4}\overset{1}{\ln e} = \ln 0 \Rightarrow x = 4\ln 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ no té un punt crític pq. no existeix $\ln 0 \Rightarrow \nexists x$.

$$\Rightarrow \text{máx} = \begin{cases} |f''(0)| = \frac{1}{16}e^{\frac{0}{4}} = \frac{1}{16}e^0 = \frac{1}{16} = 0'0625 \\ \boxed{|f''(4)|} = \frac{1}{16}e^{\frac{4}{4}} = \boxed{\frac{e}{16}} = 0'16989\ldots \end{cases}$$

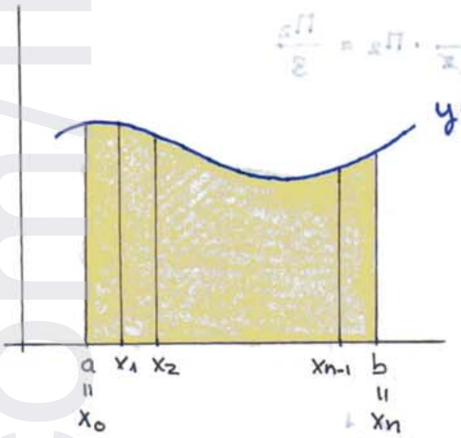
$$\Rightarrow \text{cota error} = \frac{M_2}{3} = \frac{e}{16}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{\frac{e}{48}}$$

Fórmula / método / regla de Simpson

f contínua en $[a,b]$

n par.

calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ de forma aproximada.



$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$

$x_i = a + i\,\dfrac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq S(n)$$

$$S(n) = \frac{b-a}{3n}\Big[f(a) + f(b) + 4\underbrace{\big(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\big)}_{\text{los de subíndice impar}} + 2\underbrace{\big(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\big)}_{\text{los de subíndice par}} \Big]$$

Fórmula del error de $\int_a^b f(x)\,dx \simeq S(n)$

si f es 4 veces derivable en $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ tq.

tq. $\left| \int_a^b f(x)\,dx - S(n) \right| = \dfrac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot |f^{IV}(c)|$.

Si $M_4 \geq \max\{ |f^{IV}(x)| \mid x \in [a,b] \} \Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - S(n) \right| \leq \boxed{\dfrac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4}$

cota del error absoluto.

12. Calculeu la integral $I = \int_0^4 (1 - e^{x/4})\, dx$.

c) Fent ús de la fórmula de Simpson amb una partició de 4 subintervals.

$x_0 = a = 0$

$x_1 = a + 1 \cdot \frac{b-a}{n} = 0 + \frac{4-0}{4} = 1$

$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n} = 0 + 2 \cdot \frac{4-0}{4} = 2 \cdot 1 = 2$

$x_3 = a + 3\,\frac{b-a}{n} = 0 + 3 \cdot \frac{4-0}{4} = 3 \cdot 1 = 3$

$x_4 = b = 4$.

$$S(4) = \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + f(b) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2\left(f(x_2)\right)\right] =$$

$$= \frac{4-0}{3 \cdot \cancel{4}}\left[(1 - e^{\frac{0}{4}}) + (1 - e^{\frac{4}{4}}) + 4\left((1 - e^{\frac{1}{4}}) + (1 - e^{\frac{3}{4}})\right) + 2\left(1 - e^{\frac{2}{4}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + 1 + 4 + 4 + 2 - \left(e^0 + e^1 + 4e^{\frac{1}{4}} + 4e^{\frac{3}{4}} + 2e^{\frac{2}{4}}\right)\right] = \boxed{-2'8732...}$$

e) Calculeu la cota superior de l'error que es comet en el càlcul de l'apartat c).

$$|\text{error}| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4 = \frac{(4-0)^5}{180 \cdot 4^4} \cdot M_4 = \frac{\cancel{4^5}}{45 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4^4}} \cdot M_4 = \frac{M_4}{45}$$

$M_4 = \text{màx}\, \{\, |f^{(4)}(x)| \mid x \in [0, 4] \,\}$

$f^{(4)}(x)$ màx $\Rightarrow f^{(5)}(x) = 0$. Pero como $f^{(5)}$ no tiene solución $\Rightarrow$

$\Rightarrow M_4 = $
- $f^{(4)}(0) = \left|-\frac{1}{256} \cdot e^{\frac{0}{4}}\right| = \frac{1}{256} \simeq 3'906 \cdot 10^{-3}$
- $f^{(4)}(4) = \left|-\frac{1}{256} \cdot e^{\frac{4}{4}}\right| = \frac{e}{256} \simeq 0'0106...$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{256}\, e^{\frac{x}{4}}$$

$$\Rightarrow |\text{error}| \leq \frac{M_4}{45} = \frac{\frac{e}{256}}{45} = \boxed{\frac{e}{11.520}}$$

13. Sigui la integral $I = \int_{0'6}^{1'0} (\sin x \cos x)^{\frac{4}{3}}\, dx$

a) Sabent que $0 < f^{(4)}(x) < 20$, $\forall x \in [0'6, 1'0]$, calculeu el nombre de subintervals necessaris per obtenir el valor de la integral amb una precisió de com a mínim quatre decimals correctes ($0'5 \cdot 10^{-4}$).

$$|I - S(n)| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} \cdot M_4 = \frac{(1'0 - 0'6)^5}{9\,\cancel{180}\, n^4} \cdot \cancel{20} = \frac{0'4^5}{9n^4}$$

$$0 < f^{(4)}(x) < 20$$

$$a = 0'6$$

$$b = 1'0.$$

Se impone que: $|\text{error}| \leq \frac{0'4^5}{9n^4} \leq 0'5 \cdot 10^{-4}$ y se calcula n.

$$n^4 \geq \frac{0'4^5}{9 \cdot 0'5 \cdot 10^{-4}} = 22'75\ldots \Rightarrow n \geq \sqrt[4]{22'75} = 2'18\ldots \Rightarrow \boxed{n \geq 4}$$

n par

b) Doneu el valor aproximat de la integral I amb el grau d'exactitud demanat a l'apartat a).

$$S(4) = \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + f(b) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2\left(f(x_2)\right)\right] =$$

$$= \frac{1'0 - 0'6}{3 \cdot 4}\left[(\sin 0'6 \cos 0'6)^{\frac{4}{3}} + (\sin 1'0 \cos 1'0)^{\frac{4}{3}} + 4\left[(\sin 0'7 \cos 0'7)^{\frac{4}{3}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + (\sin 0'9 \cos 0'9)^{\frac{4}{3}}\right] + 2\left[\sin 0'8 \cos 0'8\right]^{\frac{4}{3}}\right] = \boxed{0'15310\ldots}$$

$$x_0 = a = 0'6$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n} = 0'6 + \frac{1'0 + 0'6}{4} = 0'6 + \frac{0'4}{4} = 0'6 + 0'1 = 0'7$$

$$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n} = 0'6 + 2\,\frac{1'0 + 0'6}{4} = 0'6 + 2\,\frac{0'4}{4} = 0'6 + 0'2 = 0'8$$

$$x_3 = a + 3\,\frac{b-a}{n} = 0'6 + 3\,\frac{1'0 + 0'6}{4} = 0'6 + 3\,\frac{0'4}{4} = 0'6 + 0'3 = 0'9$$

$$x_4 = b = 1'0$$

$$\boxed{I = 0'15310 \pm 0'5 \cdot 10^{-3}}$$

c) Calculeu la cota perior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b).

$$|\text{error}| \leq \frac{(b-a)^5}{18\ n^4} \cdot M_4 = \frac{0'4^5}{9n^4} = \frac{0'4^5}{9 \cdot 4^4} = \boxed{4'4 \cdot 10^{-6}}$$