3. FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE

3.1. Funciones de una variable: repaso del concepto de continuidad.

1. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x\longrightarrow f(x) \\ a\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$ f es continua en $a \Leftrightarrow \begin{cases} a\in \text{Dom} f \quad (\exists f(a)\in\mathbb{R}) \\ \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \quad (\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in\mathbb{R}) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)\end{cases}$

2. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x\longrightarrow f(x) \\ A\subseteq\mathbb{R}\end{array}\right\}$ f es continua en $A \Leftrightarrow f$ es continua en a, $\forall a\in A$.

3. f no es continua en a:
   - $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ tiene en a un punto de discontinuidad evitable.
     $\left(\begin{array}{l}\exists f(a),\ \exists \lim f(x)\in\mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)\end{array}\right)$
   - $\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) \vee \lim\limits_{x\to a} f(x) \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty\end{cases}$
     - $\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)\in\mathbb{R}$
       $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in\mathbb{R}$
       $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
       $\Rightarrow f$ tiene en a una discontinuidad de salto finito (o de la 1ª especie).
     - $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \begin{cases} +\infty \\ -\infty\end{cases}$
       $\vee$
       $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \begin{cases} +\infty \\ -\infty\end{cases}$
       $\Rightarrow f$ tiene en a una discontinuidad asintótica (o de la 2ª especie).
     - las otras (o de la 2ª especie)

Ejemplos:

1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

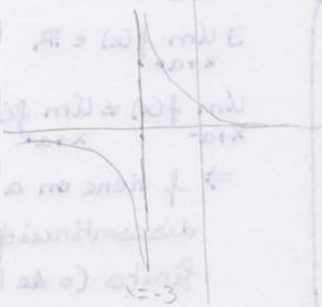
f es continua en todo $\mathbb{R}$.

f tiene una discontinuidad evitable en $x = 1$.

2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$x \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -3^-} f(x) &= \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -3^+} f(x) &= \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x = -3.$$



f es continua en todo $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

3. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (2x+1) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (x^2) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad de salto finito en } x = 0.$$

Propiedades

① $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a \in \text{Dom } f \end{array}\right\}$ f es $\left\{\begin{array}{l} \text{polinómica} \\ \text{o} \\ \text{racional} \\ \text{o} \\ \text{trigonométrica} \\ \text{o} \\ \text{exponencial} \\ \text{o} \\ \text{logaritmica} \\ \text{o} \\ \text{potencial} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow f$ es continua en a.

② $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ a \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \\ f, g \text{ son continuas en } a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f+g \\ f-g \\ f \circ g \\ f/g \text{ si } g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ son continuas en a.

$$f+g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

• $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ a \in \text{Dom} f \\ f(a) \in \text{Dom } g \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{si } f \text{ es continua en } a \\ \text{y } g \text{ continua en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

es continua en a.

$g \circ f \rightarrow$ "f composat amb g".

③ $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \\ f \text{ continua en } L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$.

Propiedades

① $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a \in \text{Dom } f \end{array}\right\}$ f es $\left\{\begin{array}{l} \text{polinómica} \\ \text{o} \\ \text{racional} \\ \text{o} \\ \text{trigonométrica} \\ \text{o} \\ \text{exponencial} \\ \text{o} \\ \text{logaritmica} \\ \text{o} \\ \text{potencial} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow f$ es continua en a.

② $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ a \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \\ f, g \text{ son continuas en } a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f+g \\ f-g \\ f \cdot g \\ f/g \text{ si } g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ son continuas en a.

$$f+g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)+g(x) = (f+g)(x)$$

- $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ a \in \text{Dom} f \\ f(a) \in \text{Dom } g \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{si } f \text{ es continua en } a \\ \text{y } g \text{ continua en } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow (g \circ f)(x) = \\ \qquad = g(f(x)). \end{array}$
  es continua en a.

$g \circ f \rightarrow$ "f composat amb g".

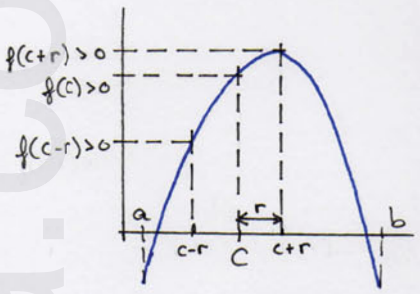
③ $\left.\begin{array}{l} f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funciones} \\ \lim_{x \to a} g(x) = L \\ f \text{ continua en } L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} f(g(x)) = f(L) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$

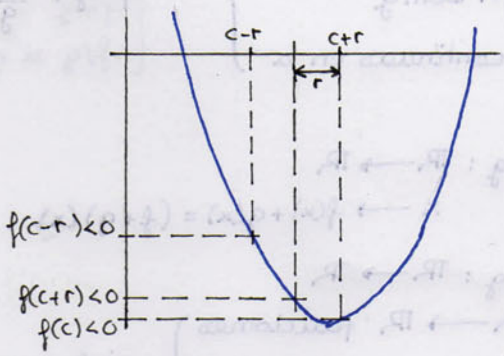
3.2. Algunos teoremas básicos de funciones continuas.

(Teorema del signo. Teorema de Bolzano. Teorema de Weierstrass. Teorema del valor intermedio. Métodos de la bisección y de la secante para aproximar ceros de funciones).

Teorema del signo (Teorema de conservación del signo).

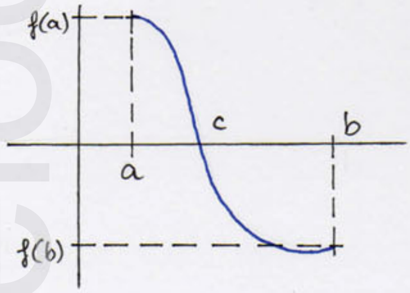
$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ c \in (a,b) \text{ tq. } f(c) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r > 0 \text{ tq. } \forall x \in (c-r, c+r),\ f(x)\cdot f(c) > 0 .$$

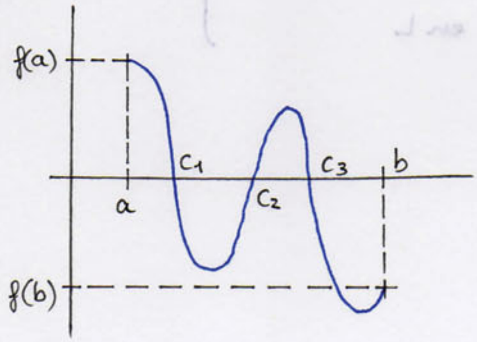




Teorema de Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tq. } f(c) = 0$$





demostración

sea $f(a)>0$ y $f(b)<0$ (si es al revés se hace igual).

sea:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{x\in[a,b] \mid f(x)>0\}\subset\mathbb{R} \\ A\neq\emptyset \ (a\in A) \\ A \text{ acotado superiormente } (\forall x\in A,\ x\leq b) \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema del extremo} \\ \text{(Axioma del supremo).}}}{\Rightarrow} \exists \sup A$$

sea $c=\sup A$ y veremos que $f(c)=0$

demostración por reducción al absurdo.

(i) $$\left.\begin{array}{l} \text{si } f(c)>0 \\ f \text{ contínua en } [a,b] \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema de} \\ \text{conservación del signo}}}{\Rightarrow} \exists r>0 \text{ tq. } \forall x\in(c-r,c+r),\ f(x)>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x\in(c,c+r),\ x\in A \Rightarrow c$ no cota sup de A. CONTRADICCIÓN.

(ii) $$\left.\begin{array}{l} f(c)<0 \\ f \text{ contínua en } [a,b] \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema de} \\ \text{conservación del signo.}}}{\Rightarrow} \exists r>0 \text{ tq. } \forall x\in(c-r,c+r),\ f(x)<0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x\in(c-r,c),\ f(x)<0 \Rightarrow$ habrá cotas sup. de A menores que $c \Rightarrow$

$\Rightarrow c$ no $\sup A \Rightarrow$ CONTRADICCIÓN.

1. Demostreu que l'equació $x^3-3x^2+1=0$ té una solució a l'interval $[0,2]$.

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=x^3-3x^2+1$$

f es polinómica $\Rightarrow f$ continua en todo $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+1 \text{ contínua en } [0,2] \\ f(0)=0-0+1=1>0 \\ f(2)=8-12+1=-3<0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists c\in(0,2) \text{ tq. } f(c)=0.$$

2. Siguin $a,b\in\mathbb{R}$, amb $a<b$, i siguin f i g dues funcions contínues en $[a,b]$ amb $f(a)<g(a)$ i $f(b)$ $g(b)$. Demostreu que existeix $c\in(a,b)$ que verifica $f(c)=g(c)$.

$$\left.\begin{array}{l} a,b\in\mathbb{R},\ a<b \\ f,g \text{ contínues en } [a,b] \\ f(a)<g(a) \\ f(b)>g(a) \end{array}\right\} \text{demostrar que } \exists c\in(a,b) \text{ tq. } f(c)=g(c) \Rightarrow \underbrace{f(c)-g(c)}_{h(c).}=0$$

sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
$$x\longrightarrow h(x)=f(x)-g(x)$$

$f(a) < g(a) \Rightarrow f(a) - g(a) < 0$
$f(b) > g(b) \Rightarrow f(b) - g(b) > 0$

h contínua en todo $\mathbb{R}$ pq. es resta de dos funciones contínuas

$$\left.\begin{array}{l} h(x) = f(x) - g(x) \text{ contínua en } [a,b] \\ h(a) = f(a) - g(a) < 0 \\ h(b) = f(b) - g(b) > 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) \text{ tq. } h(c) = 0$$

$$h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c).$$

3. Demostreu que si $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ és una funció contínua, llavors existeix al menys un $\mathcal{E} \in \mathbb{R}$ tal que $f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

$f(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \Rightarrow f(\mathcal{E}) - \mathcal{E} = 0 \Rightarrow g(\mathcal{E}) = f(\mathcal{E}) - \mathcal{E} = 0$

sea $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow g(x) = f(x) - x$.

g es contínua en todo $\mathbb{R}$ pq. es resta de funciones contínuas.

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = f(x) - x \text{ contínua en } [0,1] \\ g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists\, \mathcal{E} \in [0,1] \text{ tq. } g(\mathcal{E}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \mathcal{E} \in [0,1] \text{ tq. } f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

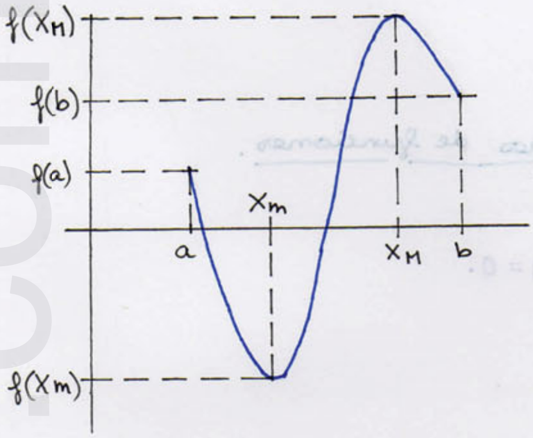
$$\left\{\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \text{ pq. } f(0) \in [0,1] \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \text{ pq. } f(1) - 1 \text{ como mucho será } 0. \end{array}\right.$$

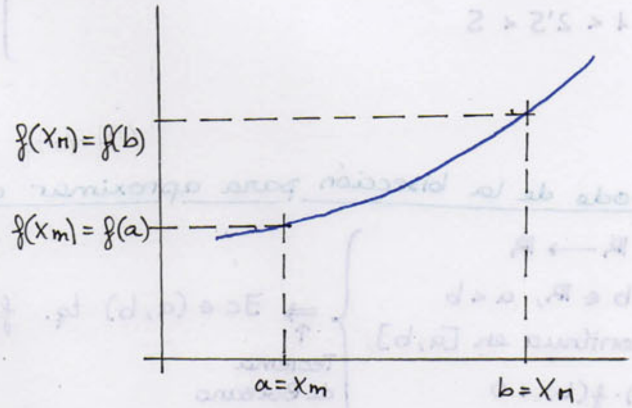
Teorema de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \to f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, x_m, x_M \in [a,b] \text{ tq. } \forall x \in [a,b],\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \text{ y } f([a,b]) = [f(x_m), f(x_M)].$$

$f(x_m)$: valor mínimo absoluto de f en $[a,b]$.

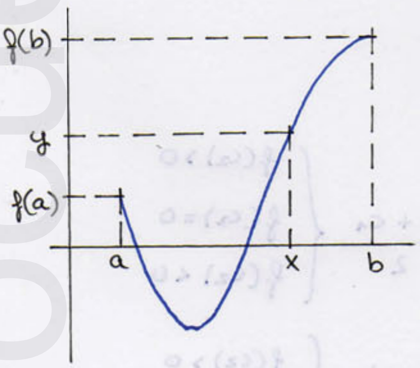
$f(x_M)$: valor máximo absoluto de f en $[a,b]$.

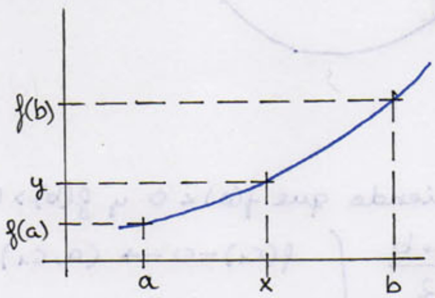




Teorema del valor intermedio

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \to f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \forall y \text{ entre } f(a) \text{ y } f(b),\ \exists x \in [a,b] \text{ tq. } f(x) = y.$$





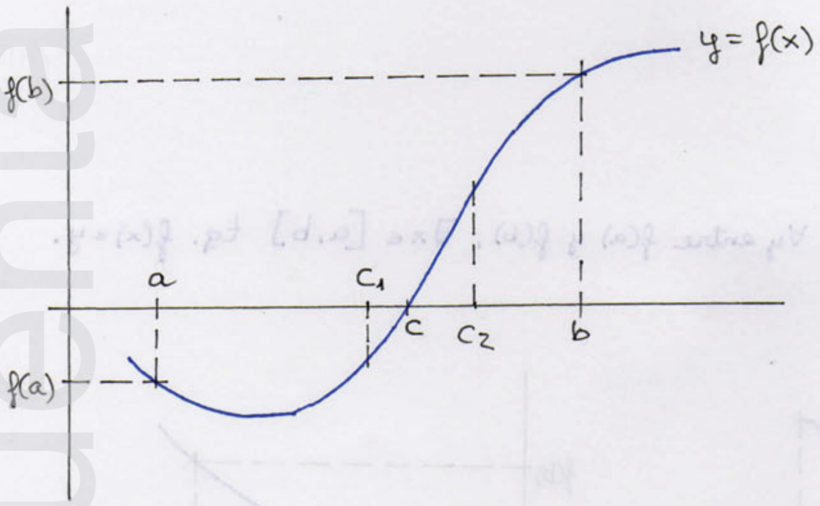
4. Podem assegurar que la funció $f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin\pi x+3$ pren el valor 2'5 a l'interval tancat $[-2,2]$?

f es contínua en todo $\mathbb{R}$ pq. es resta de funciones contínuas (polinómica y sinusoidal).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin(\pi x)+3 \text{ contínua en } [-2,2] \\ f(-2)=\frac{-8}{4}-\cancelto{0}{\sin(-2\pi)}+3=-2+3=1 \\ f(2)=\frac{8}{4}-\cancelto{0}{\sin(2\pi)}+3=2+3=5 \\ 1<2'5<5 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema del} \\ \text{valor intermedio}}}{\Rightarrow} \exists x\in(-2,2) \text{ tq. } f(x)=2'5.$$

Método de la bisección para aproximar ceros de funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists c\in(a,b) \text{ tq. } f(c)=0.$$



suponiendo que $f(a)<0$ y $f(b)>0$.

$$c_1=\frac{a+b}{2}\begin{cases} f(c_1)>0\rightarrow(a,c_1)\longrightarrow c_2=\dfrac{a+c_1}{2}\begin{cases} f(c_2)>0 \\ f(c_2)=0 \\ f(c_2)<0 \end{cases} \\ f(c_1)=0\Rightarrow c=c_1 \\ f(c_1)<0\rightarrow(c_1,b)\longrightarrow c_2=\dfrac{c_1+b}{2}\begin{cases} f(c_2)>0 \\ f(c_2)=0 \\ f(c_2)<0 \end{cases} \end{cases}$$

en la iteración n-ésima:

$$|c-c_n|\leq\frac{|a-b|}{2^n}$$

↘ cota del error absoluto de c_n.

5. Raoneu perquè l'equació $e^{-x^2} = 2x$ té una solució en l'interval $[0,1]$ i calculeu-la aproximadament amb una precisió de 0'1.

$e^{-x^2} = 2x \Leftrightarrow f(x) = 2x - e^{-x^2} = 0$.

cota de l'error absolut de C_n en $[0,1]$: $\frac{b-a}{2^n} = \frac{1-0}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

imponemos que $\frac{1}{2^n} < 0'1 \Leftrightarrow 10 < 2^n \Rightarrow n \geq 4$.

$\Rightarrow$ hacen falta <u>4 iteraciones</u>.

$f(x) = 2x - e^{-x^2}$ contínua en todo $\mathbb{R}$ pq. es resta de funciones (polinómica y exponencial).

① $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x - e^{-x^2} \text{ contínua en } [0,1] \\ f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0 \\ f(1) = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e} \simeq 1'63 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Teorema de Bolzano}}{\Rightarrow} \exists c \in (0,1) \text{ tq. } f(c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in (0,1) \text{ tq. } e^{-c^2} = 2c$.

$C_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0'5$

② $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x - e^{-x^2} \text{ contínua en } [0,0'5] \\ f(0) = 0 - e^0 = -1 < 0 \\ f(0'5) = 1 - e^{-0'5^2} \simeq 0'22 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Teorema de Bolzano.}}{\Rightarrow} \exists c \in (0,0'5) \text{ tq. } f(c) = 0$

$C_2 = \frac{0+0'5}{2} = 0'25$

③ $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x - e^{-x^2} \text{ contínua en } [0'25,0'5] \\ f(0'25) = 2\cdot 0'25 - e^{-0'25^2} \simeq -0'44 < 0 \\ f(0'5) = 2\cdot 0'5 - e^{-0'5^2} \simeq 0'22 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Teorema de Bolzano}}{\Rightarrow} \exists c \in (0'25,0'5) \text{ tq. } f(c) = 0$

$C_3 = \frac{0'25+0'5}{2} = 0'375$

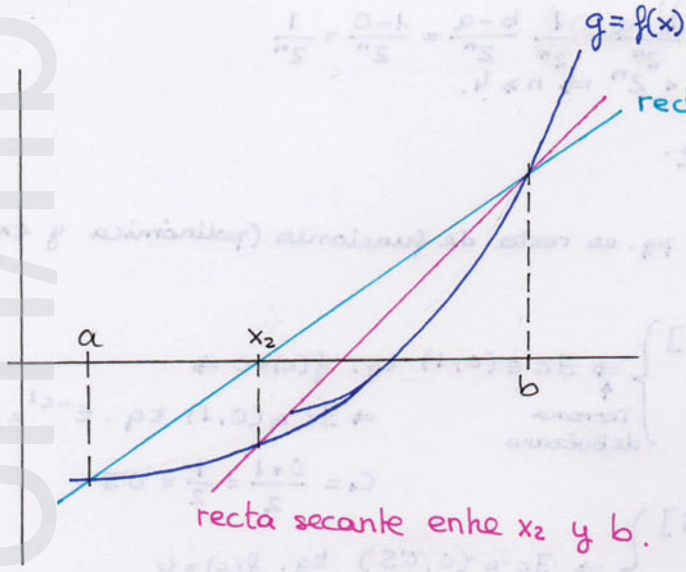
④ $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x - e^{-x^2} \text{ contínua en } [0'375,0'5] \\ f(0'375) = 2\cdot 0'375 - e^{-0'375^2} \simeq -0'12 < 0 \\ f(0'5) = 2\cdot 0'5 - e^{-0'5^2} \simeq 0'22 > 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Teorema de Bolzano}}{\Rightarrow} \exists c \in (0'375,0'5) \text{ tq. } f(c) = 0$

$C_4 = \frac{0'375+0'5}{2} = 0'4375$.

Solució: $c = 0'4$

Método de la secante para aproximar ceros de funciones

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tq. } f(c)=0$$



$x_0 = a$

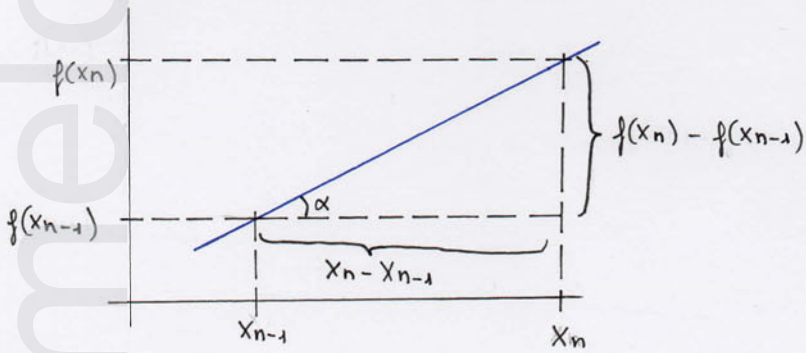
$x_1 = b$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x) - f(x_{n-1})}\cdot f(x_n) \quad , \; n \geq 1.$$

$$\text{criterio de parada} \left\{\begin{array}{l} |x_{n+1} - x_n| < \text{presición requerida} \\ \text{y} \\ |f(x_{n+1})| < \text{presición requerida} \end{array}\right. \Rightarrow c \simeq x_{n+1}$$

recta secante a $y = f(x)$ por la pendiente $(x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_n, f(x_n)) \rightarrow$

$\rightarrow$ pendiente $\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ $f(x_n)$ pasa por $(x_n, f(x_n))$.



$$\left.\begin{array}{l} y = y_p + m(x - x_p) \\ y = f(x_n) + \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_n) = -f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$