9. FÓRMULA DE TAYLOR EN VARIAS VARIABLES. EXTREMOS RELATIVOS

9.1. Derivadas parciales de orden superior. Matriz Hessiana. Polinomio de Taylor. Fórmula de Lagrange del resto.

<u>funciones derivadas parciales</u>

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \longrightarrow f(\vec{x})$$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 f,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad \vec{x} \longrightarrow D_1 f(\vec{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ D_n f,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\qquad \vec{x} \longrightarrow D_n f(\vec{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}\right\}$$

n funciones derivadas parciales de 1^{er} orden.

$$\operatorname{Dom} D_i f \subset \overset{\circ}{\widehat{\operatorname{Dom} f}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ex. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = x^2 + x^3 y z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + yz \cdot 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 + x^3 z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 + x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \longrightarrow n^2 \text{ derivadas parciales de } 2^{\circ} \text{ orden.}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Teorema de Schwarz

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \vec{a}=(a_1,\dots,a_n)\in \overset{\circ}{\text{Dom}} f \\ i,j\in\{1,\dots,n\} \\ f,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\ \text{son continuas en } \vec{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

Matriz Hessiana

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \vec{a}\in \overset{\circ}{\text{Dom}} f \\ f \text{ tiene derivadas parciales} \\ \text{de } 2^{\circ} \text{ orden en } a \end{array}\right\} \quad Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{derivadas parciales de } \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{ en el punto } \vec{a}. \\ \vdots \\ \leftarrow \text{derivadas parciales de } \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ en el punto } \vec{a} \end{array}$$

Ex. $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = y\sin x + x^y$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y\cos x + y\cdot x^{y-1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin x + x^y \cdot \ln x \end{array}\right\} \vec{\nabla} f = (y\cos x + yx^{y-1},\ \sin x + x^y \ln x)$$

↳ vector gradiente

↑

derivadas parciales de 1er orden.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(-\sin x) + y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos x + (1\cdot x^{y-1} + y\cdot x^{y-1}\ln y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x + (y\cdot x^{y-1}\cdot \ln x + x^{\cancel{y}\ y-1}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}) = \cos x + yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 + \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = \ln^2 x \cdot x^y$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -y\sin x + y(y-1)x^{y-2} & \cos x + yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} \\ \cos x + yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} & \ln^2 x \cdot x^y \end{pmatrix}$$

↳ Matriz Hessiana

↑

derivadas parciales de 2º orden.

Fórmula de Lagrange del resto

$(x,y) \approx (a,b) \longrightarrow f(x,y) \approx P_{k,f,(a,b)}(x,y)$.

$$\left| f(x,y) - P_{k,f,(a,b)}(x,y) \right| = \left| R_{k,f,(a,b)}(x,y) \right| = \frac{1}{(k+1)!} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)(x-a) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)(y-b) \right|^{\text{"}k+1\text{"}} = \frac{1}{(k+1)!} \left| \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{0} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1-i}\, \partial x^{i}}(\alpha,\beta)(x-a)^{i}(y-b)^{k+1-i} \right| .$$

$(\alpha,\beta) \in$ segmento que une (a,b) con (x,y).

$$\begin{cases} \alpha \text{ entre } a \text{ y } x. \\ \beta \text{ entre } b \text{ e } y. \end{cases}$$

1. Donada la funció $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 per a f en el punt $(0,0)$.

$$P_{2,f,(0,0)}(x,y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0) \right).$$

$$f(x,y) = \ln(1+2x+3y) \longrightarrow f(0,0) = \ln(1+0+0) = \ln 1 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+2x+3y} \cdot 2 = \frac{2}{1+2x+3y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{2}{1+0+0} = 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+2x+3y} \cdot 3 = \frac{3}{1+2x+3y} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{3}{1+0+0} = 3.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2}{(1+2x+3y)^2} \cdot 2 = \frac{-4}{(1+2x+3y)^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{-4}{(1+0+0)^2} = -4.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2}{(1+2x+3y)^2} \cdot 3 = \frac{-6}{(1+2x+3y)^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{-6}{(1+0+0)^2} = -6.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-3}{(1+2x+3y)^2} \cdot 3 = \frac{-9}{(1+2x+3y)^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{-9}{(1+0+0)^2} = -9$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{2,f,(0,0)}(x,y)} = 0 + 2(x-0) + 3(y-0) + \frac{1}{2!}\left(-4(x-0)^2 + 2\cdot(-6)(x-0)(y-0) - \right.$$

$$\left. - 9(y-0)^2\right) = \boxed{2x + 3y - 2x^2 - 6xy - \frac{9}{2}y}$$

2. Donada la funció $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

a) Escriviu el Polinomi de Taylor de grau 1 per a f en el punt $(1,1)$.

$$P_{1,f,(1,1)}(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy} \longrightarrow f(1,1) = \sqrt[3]{1\cdot 1} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^{\frac{1}{3}-1} = \sqrt[3]{x}\cdot\frac{1}{3}\,y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{1,f,(1,1)}(x,y)} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-1) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}}$$

b) Calculeu aproximadament mitjançant un polinomi de primer grau, la quantitat de $\sqrt[3]{0'99\cdot 1'01}$.

$$f(0'99\cdot 1'01) = \sqrt[3]{0'99\cdot 1'01} \approx P_{1,f,(1,1)}(0'99, 1'01) = \frac{1}{3}\cdot 0'99 + \frac{1}{3}\cdot 1'01 +$$

$$+ \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = \boxed{1}$$

c) Calculeu usant el residu de Lagrange del polinomi de Taylor de l'apartat a, una cota de l'error de l'aproximació de l'apartat b.

$$|\text{error}| = |R_{1,f,(1,1)}(0'99, 1'01)| = \left|\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha,\beta)(0'99-1)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\alpha,\beta)(0'99-1)(1'01-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha,\beta)(1'01-1)^2\right)\right|.$$

con $0'99 \leq \alpha \leq 1$

$1 \leq \beta \leq 1'01$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{2}{3}-1} = \frac{-2}{9}\sqrt[3]{y}\cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{y}{x^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\cdot y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2\cdot y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot y^{-\frac{2}{3}-1} = \frac{-2}{9}\sqrt[3]{x}\cdot y^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{x}{y^5}}$$

2. d) Sabent que $a = 1 \pm 0'01$ i $b = 1 \pm 0'01$, useu la fórmula de propagació de l'error per calcular una cota superior de l'error de l'aproximació de $f(a,b) \simeq f(1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \pm 0'01 \begin{cases} \bar{a} = 1 \\ |a - \bar{a}| \leq 0'01 \end{cases} \\ \\ b = 1 \pm 0'01 \begin{cases} \bar{b} = 1 \\ |b - \bar{b}| \leq 0'01 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow |f(a,b) - f(1'1)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\right| \underbrace{|a-1|}_{0'01} + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right| \underbrace{|b-1|}_{0'01} =$$

$$= \frac{0'01}{3} + \frac{0'01}{3} = \frac{0'02}{3} \simeq \boxed{0'0067}$$

9.2. Puntos críticos. Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo. Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo. Cálculo de extremos relativos.

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad \vec{x} \longrightarrow f(\vec{x}) \\ \\ \vec{a} \in \text{Dom } f \\ \exists \vec{\nabla} f(\vec{a}) \end{array}\right\} \quad \vec{a} \text{ es un punto crítico de } f \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) = 0 \end{cases}$$

ó $\nexists \vec{\nabla} f(\vec{a}) \Leftrightarrow$ ó $\nexists$ alguna de las $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$

Ex. a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

f polinómica $\Rightarrow f$ de clase $\mathcal{C}^\infty$

. ptos críticos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} (0,0) \text{ es el único punto crítico.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = \underset{\overset{\vee\!\shortparallel}{0}}{x^2} + \underset{\overset{\vee\!\shortparallel}{0}}{y^2} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (0,0) \text{ un mínimo absoluto.}$$

Condición necesaria para la existencia de un extremo relativo

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{a} \in \text{Dom} f \end{array}\right\}$ f tiene en $\vec{a}$ un extremo relativo $\Rightarrow$ $\vec{a}$ pto. crítico de f.

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{a} \in \text{Dom} f \\ \vec{a} \text{ pto. crítico de } f \end{array}\right\}$ f tiene en $\vec{a}$ un punto de silla $\Leftrightarrow$ $\forall r>0$, $\exists \vec{x_1}, \vec{x_2} \in (\vec{a}, r)$ tq. $f(\vec{x_1}) > f(\vec{a}) > f(\vec{x_2})$.

Condición suficiente para la existencia de un extremo relativo (Clasificación de los puntos críticos).

$\boxed{n=2}$

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad (x,y) \longrightarrow f(x,y). \\ (a,b) \in \text{Dom} f \\ (a,b) \text{ pto. crítico de } f \\ f \text{ de clase } \mathcal{C}^2 \text{ en } (a,b) \end{array}\right\} \text{ sea } H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix}$$

si $\det H_f(a,b)$:

- >0 y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$:
  - $>0 \Rightarrow f$ tiene en (a,b) un mín. rel.
  - $=0 \rightarrow$ NO puede ser pq. $\det \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$
  - $<0 \Rightarrow f$ tiene en (a,b) un máx rel.
- $=0 \Rightarrow$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$:
  - $>0 \Rightarrow f$ tiene en (a,b) un mín. rel. o un punto de silla
  - $=0 \Rightarrow$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$:
    - $>0 \Rightarrow$ mín. rel ó punto de silla
    - $=0 \Rightarrow$ mín rel., máx rel, ó punto de silla.
    - $<0 \Rightarrow$ máx rel ó punto de silla
  - $<0 \Rightarrow$ máx. rel. ó punto de silla
- $<0 \Rightarrow f$ tiene en $\vec{a}$ un punto de silla

3. Trobeu els extrems relatius de les funcions següents:

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

f es polinómica $\Rightarrow$ f es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$.

1° Puntos críticos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 3y^2 - 9x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left. y = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3} \right\} \Rightarrow 3\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 9x = 0$$

$$\cancel{3} \cdot \frac{x^4}{3^{\cancel{2}}} - 9x = 0$$

$$x^4 - 27x = 0$$

$$x(x^3 - 27) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x^3 = 27 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 3. \end{cases}$$

$x = \sqrt[3]{27} = 3$

f tiene dos puntos críticos:

$(0,0)$ y $(3,3)$.

2° Matriz Hessiana en cada uno de los puntos.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

- en el pto $(0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det = -81 < 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene en } (0,0) \text{ un punto de silla}}$$

- en el pto $(3,3)$

$$Hf(3,3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \det > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3) = 18 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene en } (3,3) \text{ un mínimo relativo}}$$

③ $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -208 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \det > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -20 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene en } (1,1) \text{ un máximo relativo}}$$

④ Estudio local para los puntos críticos (x,y) tq. $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y = 0$.

$$f(x,y) \begin{cases} = 0 & \text{si } x^2-2x+4y^2-8y=0 \\ > 0 & \text{si } x^2-2x+4y^2-8y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene en todos estos puntos críticos, mínimos relativos}}$$

Estudio local para un punto crítico

Calcular:

1. f(pto. crítico).
2. $f(x,y)$ para los (x,y) de un entorno del punto crítico.
    1) Usando la expresión de la función y deduciendo el signo.
    2) Considerando puntos de rectas que pasan por el punto crítico (si tienen imagenes con signo diferente ⇒ punto de silla).
    3) Estudiando el signo de la función según regiones del plano.

3. c) $f(x,y) = y^2 - x^3$

f polinómica ⇒ f de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$.

① Puntos críticos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow -3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} (0,0) \text{ es el único punto crítico.}$$

② Matriz Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

② Matriz Hessiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - 2x \qquad -2xy^3 - x^2y^2 = 2xy^2 - 3x^2y^2 - 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 3x^2y^2 - 2x^3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - 6xy^2 - 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 6x^2y - 2x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy - 6x^2y - 6xy^2$$

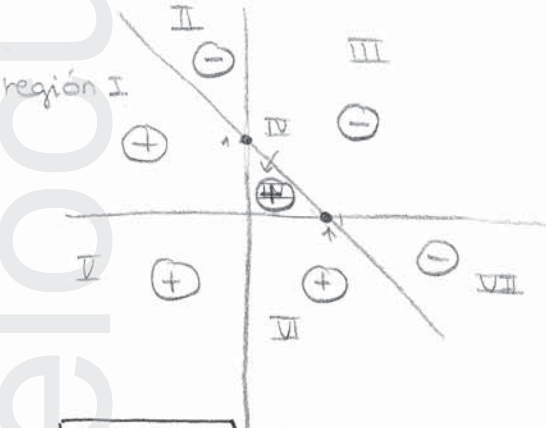
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - 6xy^2 - 2y^3 & 4xy - 6x^2y - 6xy^2 \\ 4xy - 6x^2y - 6xy^2 & 2x^2 - 6x^2y - 2x^3 \end{pmatrix}$$

③ Matriz hessiana en los puntos críticos

$$Hf\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-24}{125} & \frac{-16}{125} \\ \frac{-16}{125} & \frac{-24}{125} \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \det > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{f tiene en } \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5}\right) \text{ un máximo relativo}}$$

④ Estudio local para los puntos críticos de la forma $(x,0)$ ó $(0,y)$.

$$f(x,y) = x^2y^2(1-x-y) = 0 \iff \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1-x-y = 0 \Rightarrow y = 1-x \end{cases}$$



región I: $f(-1,1) > 0 \Rightarrow$ todos son ⊕

II: $f(-1,3) = -9 < 0 \Rightarrow$ todos son ⊖

III: $f(2,2) = -48 < 0 \Rightarrow$ todos son ⊖

IV: $f(0'2, 0'2) > 0 \Rightarrow$ todos son ⊕

V: $f(-1,1) > 0 \Rightarrow$ todos son ⊕

VI: $f(1,-1) > 0 \Rightarrow$ todos son ⊕

VII: $f(3,-1) < 0 \Rightarrow$ todos son ⊖

Solución: f tiene en los puntos $(x,0)$ con $x<1$ mínimos relativos, en $(1,0)$ un punto de silla y en los puntos $(x,0)$ con $x>1$ máximos relativos.

f tiene en los puntos $(0,y)$ con $y<1$ mínimos relativos, en $(0,1)$ un punto de silla y en los puntos $(0,y)$ con $y>1$ máximos relativos.