Mónica Sanchez
monica.sanchez@upc.edu
despatx 342. Edifici Ω
Consultes: dimarts 8-10
dimecres 11-13
dijous 9-11

NF = max{ 0'5 Final + 0'25 Parcial + 0'25 Taller , 0'75 Final + 0'25 Taller }

Parcial: 11 d'Abril
Final: 11 de Juny de 15 a 18
} portar calculadora.

Taller: 1 de Juny

0'25 Taller { 0'1 : Nota de classes
0'15 : Nota examen taller.

Programa: Maple

Números Reales: Propiedades elementales. Valor absoluto

- Conjunto de los números naturales

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Propietats

suma: $+ \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(n,m) \longrightarrow n+m$

associativa: $(n+m)+l = n+(m+l) \quad \forall n,m,l \in \mathbb{N}$
commutativa: $n+m = m+n \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$

producte: $\cdot \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(n,m) \longrightarrow nm$

associativa: $(n\cdot m)\cdot l = n\cdot(m\cdot l) \quad \forall n,m,l \in \mathbb{N}$
commutativa: $n\cdot m = m\cdot n \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$
element neutre: $1 \rightarrow n\cdot 1 = 1\cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
distributiva respecte $+$: $n(m+l) = nm + nl$.

- Conjunto de los números enteros

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

suma: $+ \quad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n,m) \longrightarrow n+m$

associativa: $(n+m)+l = n+(m+l) \quad \forall n,m,l \in \mathbb{Z}$
commutativa: $n+m = m+n \quad \forall n,m \in \mathbb{Z}$
element neutre: $0 \rightarrow n+0 = 0+n = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
element oposat: $n+(-n) = (-n)+n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

producte: $\cdot \quad \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $(n,m) \longrightarrow nm$

associativa: $(n\cdot m)\cdot l = n\cdot(m\cdot l) \quad \forall n,m,l \in \mathbb{Z}$
commutativa: $n\cdot m = m\cdot n \quad \forall n,m \in \mathbb{Z}$
element neutre: $1 \rightarrow n\cdot 1 = 1\cdot n = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
distributiva respecte $+$: $n(m+l) = nm + nl$.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ anillo commutativo con elemento unidad.

- Conjunto de números racionales

$\mathbb{Q}$

$m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ $\quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

a, b, c, d amb $b, d \neq 0$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

suma: $+ \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$(p, q) \longrightarrow p+q$

producto: $\cdot \quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$(p, q) \longrightarrow pq$

Propietats

associativa: $(p+q)+r = p+(q+r) \quad \forall p, q, r \in \mathbb{Q}$
commutativa: $p+q = q+p \quad \forall p, q \in \mathbb{Q}$
element neutre: $0 \rightarrow p+0 = 0+p = p \quad \forall p \in \mathbb{Q}$
element oposat: $p+(-p) = (-p)+p = 0$

associativa: $(p \cdot q) \cdot l = p \cdot (q \cdot l)$
commutativa: $p \cdot q = q \cdot p$
element neutre: $1 \rightarrow p \cdot 1 = 1 \cdot p = p$
distributiva respecte $+$: $p(q+r) = pq + pr$
element invers $\forall p \neq 0 \Rightarrow p \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot p = 1$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ cuerpo commutativo

$p, q \in \mathbb{Q}$, $p \neq q \Rightarrow$ Existeixen infinits nombres racionals entre p y q.

$p < q \Leftrightarrow q - p > 0$

$$p \neq q \begin{cases} p < q \longrightarrow p < \frac{p+q}{2} < q \\ p > q \end{cases}$$

$$\hookrightarrow p < \frac{p + \frac{p+q}{2}}{2} < \frac{p+q}{2} < \frac{\frac{p+q}{2} + q}{2} < q$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: conjunto de los números irracionales.

↳ { números con una expresión decimal con infinitas cifras no periódicas }.

Ex. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, 0'1121231234\ldots$

- Conjunto de números reales

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cuerpo commutativo

suma: $+ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p, q) \longrightarrow p+q$

producte: $\cdot \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(p, q) \longrightarrow pq$

Propietats

associativa: $(p+q)+r = p+(q+r) \quad \forall p, q, r \in \mathbb{R}$
commutativa: $p+q = q+p \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$
element neutre: $0 \rightarrow p+0 = 0+p = p \quad \forall p \in \mathbb{R}$
element oposát: $p+(-p) = (-p)+p = 0$

associativa: $(p \cdot q) \cdot l = p \cdot (q \cdot l) \quad \forall p, q, l \in \mathbb{R}$
commutativa: $pq = q \cdot p \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$
element neutre: $1 \rightarrow p \cdot 1 = 1 \cdot p = p \quad \forall p \in \mathbb{R}$
distributiva respecte $+$: $p(q+r) = pq + pr \quad \forall p, q, r \in \mathbb{R}$
element invers: $\forall p \neq 0 \Rightarrow p \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \cdot p = 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}$.

Relación de orden usual en $\mathbb{R}$

orden estricto: $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x < y \Leftrightarrow y - x > 0$

orden: $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y \Leftrightarrow y - x \geq 0.$

$x \leq y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{R}$ tq. $z \geq 0 \quad x + z = y$

Propiedades de $\leq$ respecto de $+$ y $\cdot$

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \underset{<}{\leq} y \Rightarrow x + z \underset{<}{\leq} y + z$

2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \left.\begin{array}{l} x \underset{<}{\leq} y \\ z \underset{>}{\geq} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \underset{<}{\leq} yz$

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad \left.\begin{array}{l} x \underset{<}{\leq} y \\ z \underset{<}{\leq} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xz \geq yz$

Elementos notables de un conjunto respecto de $\leq$

$A \subseteq \mathbb{R}$

1. $k \in \mathbb{R}$. k es una cota superior de $A \Leftrightarrow \forall a \in A, k \geq a$.
2. $h \in \mathbb{R}$. h es una cota inferior de $A \Leftrightarrow \forall a \in A, h \leq a$.

A es un conjunto acotado inferiormente $\Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{R}$ tq. h es una cota inferior de A.
A es un conjunto acotado superiormente $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tq. k es una cota superior de A.
A es un conjunto acotado $\Leftrightarrow$ A acotado superiormente e inferiormente.

3. $s \in \mathbb{R}$. s es el supremo de un conjunto A $\Leftrightarrow$ s es la menor de las cotas superiores de A. $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \leq s, \ \forall a \in A \\ \text{y} \\ \forall k \in \mathbb{R}, \ k \geq a, \ \forall a \in A \Rightarrow s \leq k. \end{array}\right.$

$s = \sup A$.

4. $i \in \mathbb{R}$. i es el ínfimo de A $\Leftrightarrow$ i es la mayor de las cotas inferiores de A $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i \leq a, \ \forall a \in A \\ \text{y} \\ \forall h \in \mathbb{R}, \ h \leq a, \ \forall a \in A \Rightarrow h \leq i \end{array}\right.$ $\qquad i = \inf A$.

5. Si $s = \sup A \in A \Leftrightarrow s$ es el màximo de A $(s = \max A)$.
6. Si $i = \inf A \in A \Leftrightarrow i$ es el mínimo de A $(i = \min A)$.

Ejemplo 1: $A = (2, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

A está acotado inferiormente y superiormente.

$\inf A = 2 \notin A$.

$\sup A = 5 \in A \longrightarrow \max A = 5$.

Ejemplo 2: $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

A está acotado inferiormente.

$\inf A = 1 \in A \longrightarrow \min A = 1$

Valor absoluto

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propiedades

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x+y| \leq |x| + |y|$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $\forall x, a \in \mathbb{R}, \ a > 0, \ |x| \underset{<}{\leq} a \Leftrightarrow -a \underset{<}{\leq} x \underset{<}{\leq} a$

Distancia euclides o distancia usual en $\mathbb{R}$

$x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$

1. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
3. $d(x,y) = d(y,x).$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

Intervalos

$a, b \in \mathbb{R}, \ a < b.$

- intervalo cerrado de extremos a y b: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$
- intervalo abierto de extremos a y b: $(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$
- intervalo abierto en a y cerrado en b: $(a,b] =]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$
- intervalo cerrado en a y abierto en a: $[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$

Semirectas

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$

Entorno de a / entorno de centro a y radio r

$a, r \in \mathbb{R}, \ r > 0$

- entorno abierto: $(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$
- entorno cerrado: $[a-r, a+r] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq r\}$

$$a-r \underset{<}{\leq} x \underset{<}{\leq} a+r \underset{-a}{\Leftrightarrow} -r \underset{<}{\leq} x-a \underset{<}{\leq} r \Leftrightarrow |x-a| \underset{<}{\leq} r$$

Problemes

3. Troba tots els nombres reals x tals que:

a) $x^2 > 3x + 4$.

$x^2 - 3x - 4 > 0$

$\rightarrow$ dibuixem la paràbola $y = x^2 - 3x - 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Solució: $\boxed{x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)}$

b) $1 < x^2 < 4 \underset{\sqrt{}}{\Leftrightarrow} 1 < |x| < 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x < 2 \text{ y } x > -2 \\ \text{y} \\ |x| > 1 \Leftrightarrow -1 > x > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ y } x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \text{ y } x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, 2) \\ x > -2 \text{ y } x < -1 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \end{array} \right.$

Solució: $\boxed{x \in (-2, -1) \cup (1, 2)}$

c) $\frac{1}{x} < x$. $\left\{ \begin{array}{l} 1 < x^2 \quad \text{si } x > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \\ 1 > x^2 \quad \text{si } x < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \end{array} \right.$

Solució: $\boxed{x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)}$

4. Troba tots els nombres reals x tals que:

a) $x^3 - 1 \geq 0$. $\Leftrightarrow x^3 \geq 1 \underset{\sqrt[3]{}}{\Leftrightarrow} x \geq 1$

Solució: $\boxed{x \in [1, +\infty)}$

b) $(x-1)|x^2 - 2| > 0 \underset{|x^2-2| \geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ x^2 - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{2}, -\sqrt{2}. \end{array} \right.$

Solució: $\boxed{x \in (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)}$

$x \in (1, +\infty) \setminus \{\sqrt{2}\}$

c) $\frac{1}{4} \leq |x^2 - 5x + 6| \leq 3.$

① $|x^2-5x+6| \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \geq x^2-5x+6 \geq \frac{1}{4}$

• $x^2-5x+6 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-5x+6-\frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+\frac{23}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-20x+23 \geq 0.$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-368}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{\cancel{20}^{5} \pm \cancel{4}\sqrt{2}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+\sqrt{2}}{2} \simeq 3'21 \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{2}}{2} \simeq 1'79 \end{cases}$$

	$\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{5-\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{5-\sqrt{2}}{2}, \frac{5+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{5+\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{5+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
f	+	0	−	0	+

$\Rightarrow 4x^2-20x+23 \geq 0$ té solució per $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

• $x^2-5x+6 \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-5x+6+\frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+\frac{25}{4} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2-20x+25 \leq 0$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-400}}{8} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

	$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$	$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
f	+	0	+

$\longrightarrow 4x^2-20x+25 \leq 0$ té solució per $x = \frac{5}{2}$

② $|x^2-5x+6| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x^2-5x+6 \leq 3$

• $x^2-5x+6 \leq 3 \Leftrightarrow x^2-5x+6-3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+3 \leq 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \simeq 4'30 \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \simeq 0'69 \end{cases}$$

	$\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$	$\frac{5-\sqrt{13}}{2}$	$\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$	$\frac{5+\sqrt{13}}{2}$	$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right)$
f	+	0	−	0	+

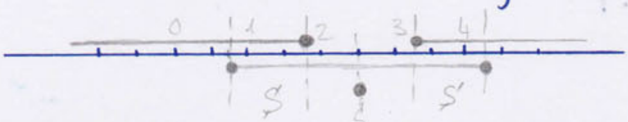
$\Rightarrow x^2-5x+3 \leq 0$ té solució per $x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right]$

• $x^2-5x+6 \geq -3 \Leftrightarrow x^2-5x+6+3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+9 \geq 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-36}}{2} = \cancel{\frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2}} \rightarrow \text{no té solució real.}$$

Possibles solucions:

$$\left.\begin{array}{l} x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \\ x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] \; ; \; x = \frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solució: } \boxed{x \in \left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] \cup \frac{5}{2}}$$



Teorema del extremo superior

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ A \text{ acotada superiormente} \\ \quad\quad\text{(inferiormente)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \sup A \in \mathbb{R} \text{ (inf)}$$