4. FUNCIONES DERIBABLES DE UNA VARIABLE

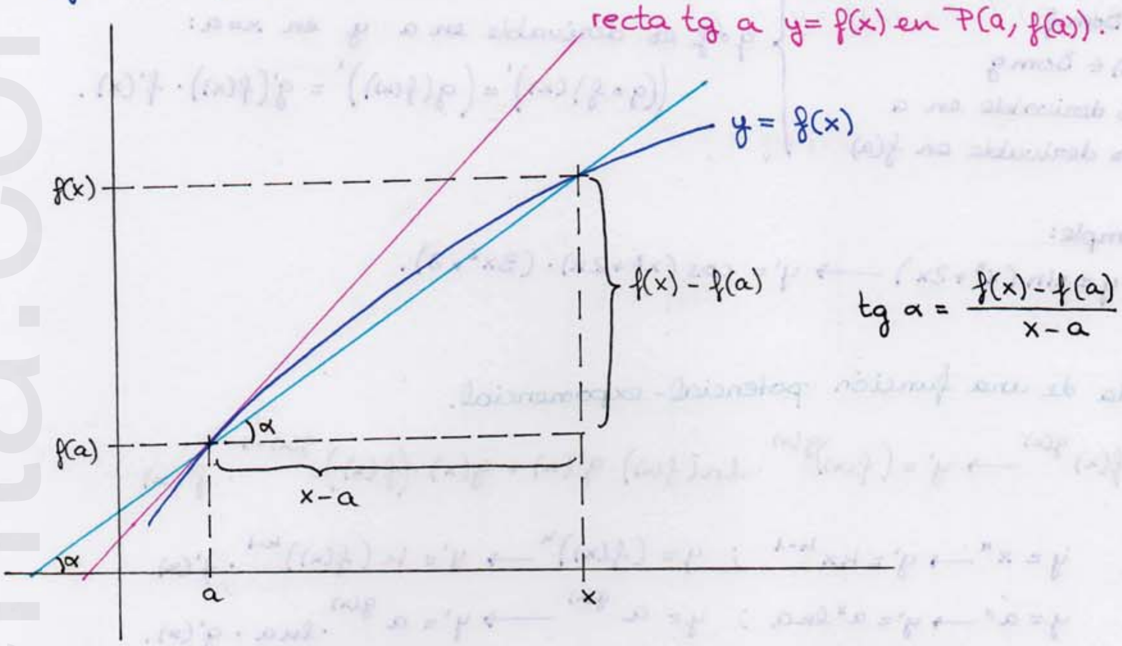
4.1. Funciones de una variable: repaso del concepto de derivada.

1. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ a\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$ f es derivable en $a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \wedge \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

2. $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

   $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y=f(x)$ en $P(a, f(a))$.

3. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ A\subseteq \text{Dom } f \end{array}\right\}$ f es derivable en $A \Leftrightarrow f$ es derivable en a, $\forall a\in A$.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ecuación de la recta tangente a $y=f(x)$ en $P(a, f(a))$.

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Propiedades

1. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ a\in \text{Dom } f \end{array}\right\}$ f es derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a.

2. $\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ a\in \text{Dom } f \end{array}\right\}$ f es $\left\{\begin{array}{l} \text{polinómica} \\ \text{racional} \\ \text{exponencial} \\ \text{logarítmica} \\ \text{trigonométrica} \\ \text{potencial} \\ \text{hiperbólica} \end{array}\right\} \Rightarrow f$ es derivable en a

3. $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones. $a \in (\mathrm{Dom}\, f) \cap (\mathrm{Dom}\, g)$ } f, g deribables en $a \Rightarrow$

$\Rightarrow$
1. $f+g$ es derivable en a. $(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$ en $x=a$.
2. $f-g$ es derivable en a. $(f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x)$ en $x=a$.
3. $f \cdot g$ es derivable en a $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ en $x=a$.
4. $\frac{f}{g}$ es derivable en a si $g(a) \neq 0$. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ en $x=a$.

4. Regla de la cadena

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones.
$a \in \mathrm{Dom}\, f$
$f(a) \in \mathrm{Dom}\, g$
f es derivable en a
g es derivable en $f(a)$
} $g \circ f$ es derivable en a y en $x=a$:

$$\left((g\circ f)(x)\right)' = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Exemple:

$$y = \sin(x^3 + 2x) \longrightarrow y' = \cos(x^3+2x)\cdot(3x^2+2).$$

derivada de una función potencial-exponencial.

$$y = f(x)^{g(x)} \longrightarrow y' = (f(x))^{g(x)} \cdot \ln(f(x)) \cdot g'(x) + g(x) \cdot (f(x))^{g(x)-1} \cdot f'(x)$$

$$y = x^k \longrightarrow y' = kx^{k-1} \; ; \; y = (f(x))^k \longrightarrow y' = k\,(f(x))^{k-1} \cdot f'(x)$$

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \; ; \; y = a^{g(x)} \longrightarrow y' = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x).$$

$$y = f(x)^{g(x)} \xrightarrow[\uparrow \ln]{} \ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) \underset{\ln a^b = b \ln a.}{\underset{\uparrow}{=}} g(x) \ln(f(x))$$

$$\ln y = g(x) \ln(f(x)) \xrightarrow[\uparrow \text{derivada}]{} \frac{1}{y}\cdot y' = g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = y\left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right) \underset{y = f(x)^{g(x)}}{\underset{\uparrow}{=}} f(x)^{g(x)}\left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right) =$$

$$= f(x)^{g(x)} \ln(f(x)) \cdot g'(x) + g(x) (f(x))^{g(x)-1} \cdot f'(x).$$

Tabla de derivadas

$f(x) = k \longrightarrow f'(x) = 0 \qquad (k \in \mathbb{R})$

$f(x) = g(x)^k \longrightarrow f'(x) = k \cdot g(x)^{k-1} \cdot g'(x) \qquad (k \in \mathbb{R} - \{0\})$

$f(x) = \ln g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$f(x) = a^{g(x)} \longrightarrow f(x) = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$

$f(x) = \operatorname{sen} g(x) \longrightarrow f'(x) = \cos g(x) \cdot g'(x)$

$f(x) = \cos g(x) \longrightarrow f'(x) = -\sin g(x) \cdot g'(x)$

$f(x) = \operatorname{tg} g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x)$

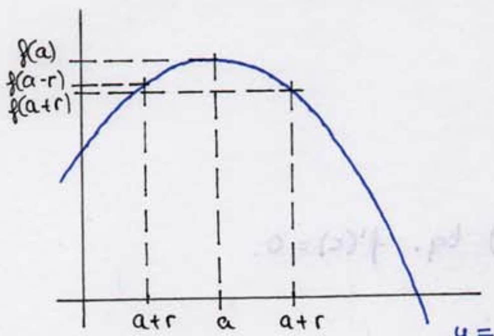
$f(x) = \operatorname{arcsen} g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \cdot g'(x)$

$f(x) = \arccos g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \cdot g'(x)$

$f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + g(x)^2}$

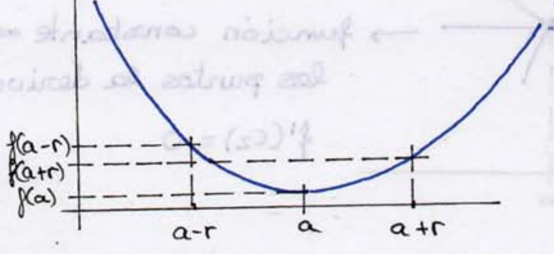
4.2. Algunos teoremas básicos de funciones derivables.

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \\ a \in \operatorname{Dom} f \end{array}\right\}$ f tiene en $x=a$ un máximo relativo/local $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tq. $\forall x\, (a-r, a+r)$, $f(x) \le f(a)$.



máx rel / local = extremo relativo.

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ función} \\ a \in \operatorname{Dom} f \end{array}\right\}$ f tiene en $x=a$ un mínimo relativo/local $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tq. $\forall x\, (a-r, a+r)$, $f(x) \ge f(a)$.



mín rel / local = extremo relativo.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función
$a \in \text{Dom} f$

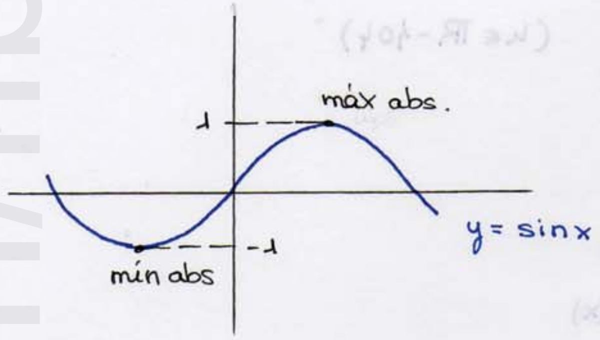
valor máximo de f en a

f tiene en $x=a$ un máximo absoluto $\Leftrightarrow f(x) \leq f(a) \;\; \forall x \in \text{Dom} f$.

f tiene en $x=a$ un mínimo absoluto $\Leftrightarrow f(x) \geq f(a) \;\; \forall x \in \text{Dom} f$.

valor mínimo de f en a

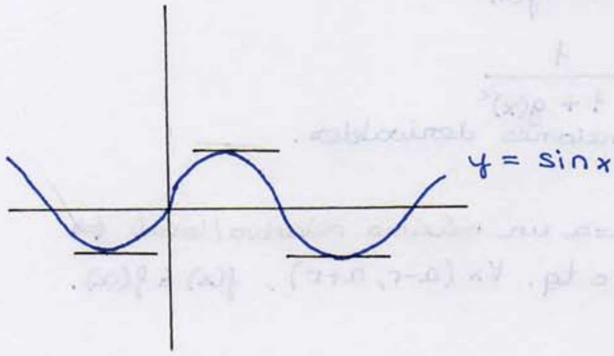
máx abs. y mín abs. = extremos absolutos.



Teorema del extremo interior

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$a \in \text{Dom} f$
f derivable en a

$\Big\}$ f tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(a) = 0$.

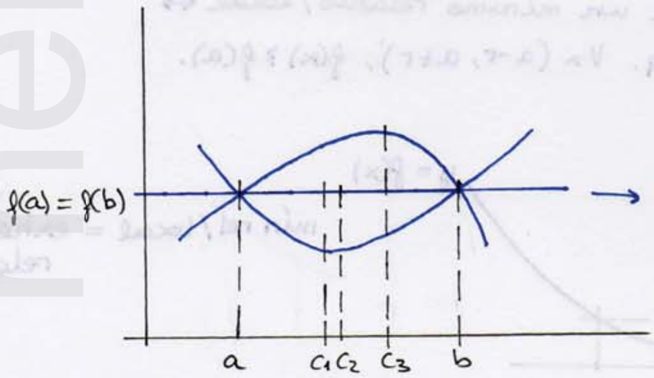


Teorema de Rolle

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función
$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$
f contínua en $[a,b]$
f derivable en (a,b)
$f(a) = f(b)$

$\Big\}$ $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq. $f'(c) = 0$.

C_1 = mín rel
C_3 = máx rel



→ función constante ⇒ en todos los puntos la derivada es 0.

$f'(c_2) = 0$

2. Demostreu que $3^{-x} = x$ té una única solució. Quina és la part entera d'aquesta solució?

↳ Teorema de Rolle.
↳ Teorema de Bolzano.

$3^{-x} = x \Leftrightarrow 3^{-x} - x = 0 \Rightarrow f(x) = 3^{-x} - x = 0$ és contínua a tot $\mathbb{R}$ pq es resta de funcions contínues.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3^{-x} - x \text{ contínua en } [0,1] \\ f(0) = 3^{0} - 0 = 1 > 0 \\ f(1) = 3^{-1} - 1 = \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3} < 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists c \in (0,1) \text{ tq. } f(c) = 0.$$

unicidad de la solución

dem. por reducción al absurdo.

$f(x) = 3^{-x} - x$ es contínua y derivable en $\mathbb{R}$.

Suponemos que $\exists a\ b \in \mathbb{R}$ tq. las dos son soluciones de la función $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) = f(b) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Rolle}}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) \text{ tq. } f'(c) = 0.$$

$f'(x) = 3^{-x} \cdot \ln(-1) - 1 = -3^{-x} \ln 3 - 1$.

si $f'(c) = 0 \Leftrightarrow -3^{-c} \ln 3 - 1 = 0$

$$\underbrace{3^{-c} \ln 3}_{>0} = \underbrace{-1}_{<0} \quad \text{Imposible}$$

4. Considerem l'equació: $e^{-x} = \ln x$.

a) Enuncieu el teorema de Bolzano.

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) \text{ tq. } f(c) = 0.$$

b) Demostreu que l'equació té una solució en el conjunt $[1, +\infty)$.

$e^{-x} = \ln x \Leftrightarrow e^{-x} - \ln x = 0 \Rightarrow f(x) = e^{-x} - \ln x$ és contínua en $(0, +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = e^{-x} - \ln x \text{ contín. en } [1,2] \\ f(1) = e^{-1} - \ln 1 = \frac{1}{e} > 0 \\ f(2) = e^{-2} - \ln 2 < 0 \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Bolzano}}}{\Rightarrow} \exists c \in (1,2) \text{ tq. } f(c) = 0.$$

unicidad de la solución

dem. per reducció a l'absurd.

suponemos que $\exists\, a,b \in [1,+\infty)$ tq. $f(a)=f(b)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Rolle}}}{\Rightarrow}$$

$$f'(x)=e^{-x}(-1)-\frac{1}{x}=-e^{-x}-\frac{1}{x}$$

si $f'(c)=0 \Leftrightarrow -e^{-c}-\frac{1}{c}=0$

$$\underbrace{-e^{-c}}_{<0}=\underbrace{\frac{1}{c}}_{>0} \quad \underline{\text{Imposible}}$$

3. Demostreu que la funció polinòmica $f_m(x)=x^3-3x+m$ no té dues arrels en $[0,1]$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

dem. per reducció a l'absurd.

suposem que $\exists\, a,b \in [0,1]$ tq. $f(a)=f(b)=0$.

$f_m(x)$ es contínua en tot $\mathbb{R}$ pq. es resta de funcions contínues.

$f_m(x)$ es derivable en tot $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_m(x) \text{ contínua en } [a,b] \\ f_m(x) \text{ derivable en } (a,b) \\ f_m(a)=f_m(b) \end{array}\right\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de Rolle}}}{\Rightarrow} \exists\, c \in (a,b) \text{ tq. } f_m'(c)=0.$$

$$f'(x)=3x^2-3$$

si $f'(c)=0 \Leftrightarrow 3c^2-3=0$

$$3c^2=3$$

$$c^2=1 \quad \underline{\text{imposible}} \text{ si } c \in (0,1).$$

otra manera

$f_m'(x)=3x^2-3 \Rightarrow \forall x \in (0,1),\ f_m'(x)<0 \Rightarrow f$ es estrictament decreixent en $(0,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f_m$ es injectiva en $(0,1) \Rightarrow \nexists\, a,b \in (0,1)$ tq. $f_m(a)=f_m(b)=0$.

1. Troben el punt de la paràbola $y = x^2$ en el qual la recta tangent és paral·lela al següent $\overline{AB}$ definit pels punt $A(1,1)$ i $B(3,9)$.

$$tg\,\alpha = \frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4 = f'(x_0)$$

recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$.

$$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{pendiente}}(x - x_0)$$

$$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$$

$$f'(x_0) = 4 \Rightarrow 2x_0 = 4 \Rightarrow x_0 = \frac{4}{2} = 2$$

$$f(x_0) = 2^2 = 4.$$

el punto es $(2,4)$

Solución: $\boxed{P(2,4)}$

★ una recta es paralela al segmento $\overline{AB} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ tienen el mismo pendiente.

Método iterativo de la tangente o de Newton-Raphson

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)$$

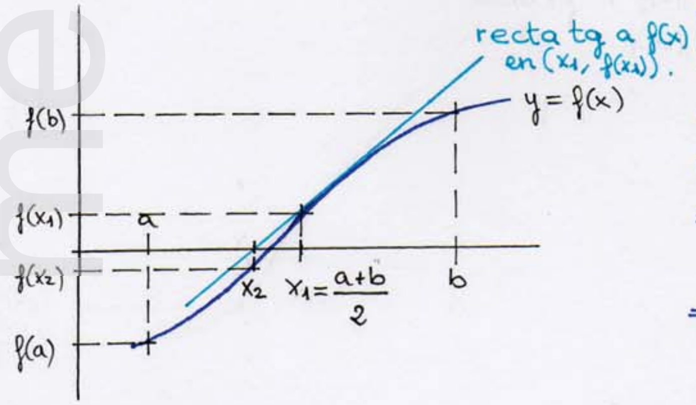
$\left.\begin{array}{l} f \text{ contínua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \\ f(a)\cdot f(b) < 0 \end{array}\right\}$ $\quad x_1 \begin{cases} a \\ b \\ \frac{a+b}{2} \end{cases}$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

criterio de parada $\quad x \simeq x_{n+1}$ si $\begin{cases} |x_{n+1} - x_n| < \text{presición requerida} \\ \text{y} \\ |f(x_{n+1})| < \text{presición requerida} \end{cases}$

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow$ absisa del punto de intersección entre:

$\begin{cases} \text{La recta tangente a } y = f(x) \text{ en el punto } (x_n, f(x_n)). \\ \text{y} \\ \text{el eje } y = 0 \end{cases}$



$\left.\begin{array}{l} y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x_n)(x - x_n) = -f(x_n)$$

$$\Rightarrow x - x_n = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

4. Considerem l'equació : $e^{-x} = \ln x$.

e) Apliqueu Newton-Raphson amb el valor inicial $x_0 = 1$ per a determinar l'arrel positiva. Atureu el càlcul quan la diferència entre dos iterats consecutius sigui menor que 10^{-4}. Quantes iteracions calen?

$f(x) = e^{-x} - \ln x$

$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(e^{-1} - \ln 1)}{(-e^{-1} - \frac{1}{1})} \simeq 1'268\underline{9}41421\ldots$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1'27 - \frac{(e^{-1'27} - \ln 1'27)}{(-e^{-1'27} - \frac{1}{1'27})} \simeq 1'309\underline{1}08403\ldots$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1'309 - \frac{(e^{-1'309} - \ln 1'309)}{(-e^{-1'309} - \frac{1}{1'309})} \simeq 1'309\underline{7}99389\ldots$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1'31 - \frac{(e^{-1'31} - \ln 1'3)}{(-e^{-1'31} - \frac{1}{1'31})} = 1'309\underline{7}99586\ldots$$

$$|x_4 - x_3| < 10^{-4} \Leftrightarrow |1'309799586 - 1'309799389| < 10^{-4} \Rightarrow 3'47 \cdot 10^{-7} < 10^{-4} \checkmark.$$

Solució: $\boxed{x_4 = 1'3097}$

$\boxed{\text{4 iteraciones}}$

c) Doneu un interval de longitud 0'1 que contingui aquesta solució.

$f(1) < 0$

$f(2) > 0$

$f(1'5) = e^{-1'5} - \ln 1'5 < 0 \Rightarrow x \in (1, 1'5)$.

$f(1'1) > 0$

$f(1'2) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1'3) > 0 \\ f(1'4) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x \in (1'3, 1'4)}$$

Teorema de Lagrange o del valor medio

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x\longrightarrow f(x) \\ a,b\in\mathbb{R} \text{ con } a<b \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ f \text{ derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c\in(a,b) \text{ tq. } \underbrace{f'(c)}_{\text{pendiente de la recta tangente a } y=f(x) \text{ en } (c,\,f(c))} = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{pendiente de la recta secante a } y=f(x) \text{ en } (a,\,f(a)) \text{ y } (b,\,f(b))}$$

demostración

considerar:

$$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x$$

y aplicar Rolle.

Consecuencia

1. Fórmula de propagación del error (para cálculos de una variable).

   $x\in\mathbb{R}$

   $\bar{x}$ una aproximación de x.

   para calcular $f(x)$ hacemos $f(\bar{x})$.

   f continua y derivable. $\underbrace{f(x)-f(\bar{x})}_{\text{error en el resultado}} \simeq f'(\bar{x})\,\underbrace{(x-\bar{x})}_{\text{error en el dato.}}$

2. $f'(x)\geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es creciente en $[a,b]$.
3. $f'(x)>0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$.
4. $f'(x)\leq 0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es decreciente en $[a,b]$.
5. $f'(x)<0$ en $[a,b] \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Teorema de Cauchy

$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones
$a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.
f, g continuas en $[a, b]$
f, g derivables en (a, b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tq. } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Regla de L'Hôpital

$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones
$a \in \mathbb{R} \vee a = +\infty$ o $a = -\infty$
f, g derivables en un entorno de a
si ① $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to a} g(x) = 0$
ó ② $\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases} \wedge \lim g(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{cases}$

$$\Rightarrow \text{ si } \exists \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}}$

Por la regla de L'Hôpital.

$\boxed{0 \cdot \infty}$

$f(x) \longrightarrow 0$
$g(x) \longrightarrow +\infty, -\infty, \infty$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \longrightarrow \boxed{\frac{0}{0}} \\[2ex] \lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \longrightarrow \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \end{cases}$$

$\boxed{0^0, \infty^0}$

① $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \to a} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \underset{0}{g(x)} \underset{-\infty}{\ln(f(x))} \to \boxed{0 \cdot \infty}$$

$\ln a^b = b \ln a$

② $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 0$

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \to a} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim \underset{0}{g(x)} \underset{+\infty}{\ln(f(x))} \to \boxed{0 \cdot \infty}$$

$\ln a^b = b \ln a$

5. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$ Regla de L'Hôpital

$\ln x$ y $\sqrt{x}$ són derivables $\forall x>0$.

b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \underset{\underset{\infty^0}{\uparrow}}{=} L$

$\ln L = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\right) \underset{\underset{\ln a^b = b\ln a}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{x}\ln x \underset{\underset{0\cdot\infty}{\uparrow}}{=}$ (*)

(*1) $\underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{L = e^0 = 1}$

multiplicar i dividir per $\frac{1}{x}$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

  $\frac{\infty}{\infty}$ · Regla de L'Hôpital.

  $\ln x$ y x son derivables $\forall x>0$.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to0} \frac{\frac{1}{\cos^2 y}}{1} = \lim_{y\to0} \frac{1}{\cos^2 y} = 1$.

  $y = \frac{1}{x}$

  $\frac{0}{0}$ Regla de L'Hôpital

  $\operatorname{tg} y$ y y son derivables en un entorno de 0.

(*2) $= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{(-1)}\cdot\cancel{x}\cdot\ln^2 x}{\cos^2\frac{1}{x}\cdot x^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(-1)}} =$

$\frac{0}{0}$ Regla de L'Hôpital

$\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{\ln x}$ son derivables para x suficientemente grandes.

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x\cos^2\frac{1}{x}} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1\cdot\cos^2\frac{1}{x} + \cancel{x}\cdot 2\cos\frac{1}{x}\cdot(\cancel{-}\operatorname{sen}\frac{1}{x})\cdot\left(\frac{\cancel{-}1}{x^{\cancel{2}}}\right)} =$

$\frac{\infty}{\infty}$ Regla de L'Hôpital.

numerador y denominador son derivables $\forall x>0$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{\underset{\to 1}{\cos^2\frac{1}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{2}{x}}\underset{\to 1}{\cos\frac{1}{x}}\cdot\underset{\to 0}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}}_{\to 1}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{L = e^0 = 1}$

Extremos absolutos en intervalos cerrados

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ a, b \in \mathbb{R}\ ,\ a < b \\ f \text{ contínua en } [a,b] \end{array}\right\} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \exists\, x_m, x_M \in [a,b] \text{ tq. } \forall x \in [a,b]\ ,\ f(x_m) \le f(x) \le f(x_M)$$

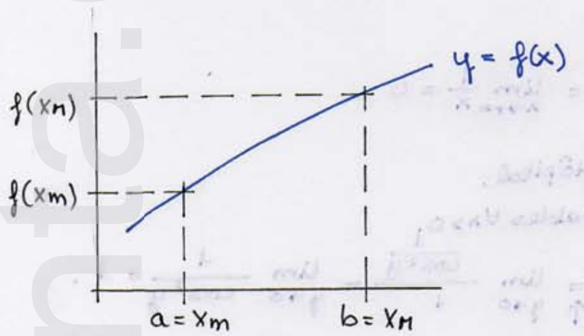
Teorema de Weierstrass

$f(x_m)$: valor mínimo absoluto de f en $[a,b]$

$f(x_M)$: valor máx. abs. de f en $[a,b]$.

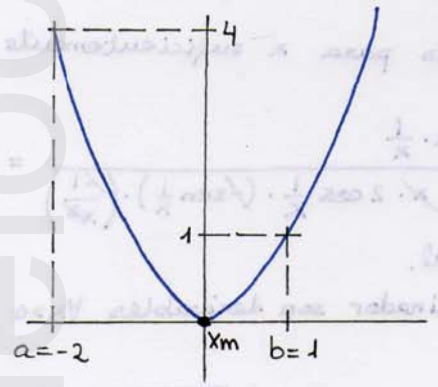
Si f es derivable en (a,b):

candidatos a ser x_m, x_M $\begin{cases} a \\ b \\ x \in (a,b) \text{ tq. } f'(x) = 0 \end{cases}$



Ex. $f(x) = x^2$.

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$.



candidatos $\begin{cases} a = -2 \longrightarrow f(a) = 4 \\ b = 1 \longrightarrow f(b) = 1 \\ f'(x) = 2x = 0 \longrightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$f(x) < f(b) < f(a) \Rightarrow \boxed{x_m = x = 0}$

$f(x_m) = f(0)$ es el mín. abs. de f en $[-3, 1]$