5. POLINOMIO DE TAYLOR

5.1. Polinomio de Taylor. Teorema de Taylor y residuo de Lagrange. Aproximación polinómica de funciones y acotación del resto.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función
$n \in \mathbb{R}$
$x_0 \in \text{Dom} f$
f n veces derivable en x_0

$\Rightarrow$ El polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0 es:

$$P_{n,f,x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ex. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

$$f(x) = \ln x \longrightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \longrightarrow f''(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(1) = \frac{2}{1^3} = 2$$

$$P_{0,f,1}(x) = f(1) = 0$$

$$P_{1,f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x-1$$

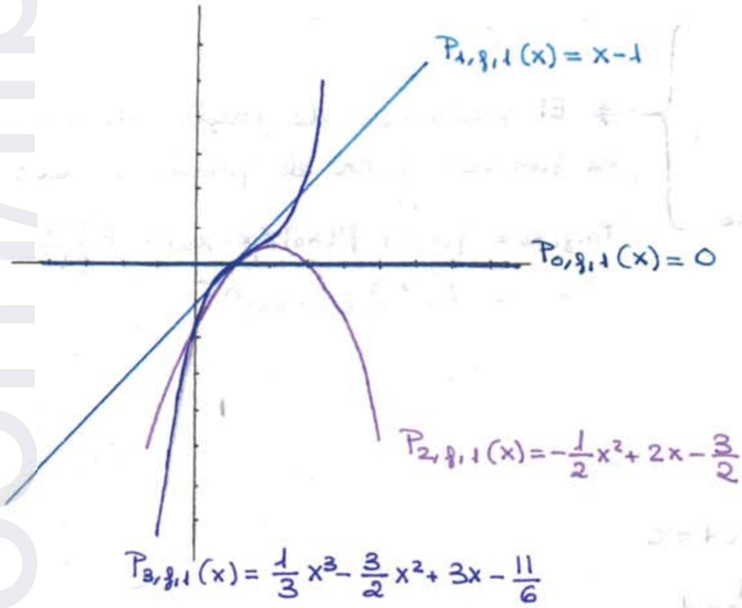
$$P_{2,f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 0 + 1(x-1) + \frac{(-1)}{2}(x^2 - 2x + 1) =$$

$$= x - 1 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

$$P_{3,f,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 =$$

$$= P_{2,f,1}(x) + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\cancel{2}}{3 \cdot \cancel{2}}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}.$$



$P_{n,f,x_0}(x)$ es el polinomio de grado $\leq n$ que mejor se aproxima a la función $f(x)$ en un entorno del x_0 de entre todos los polinomios de grado $\leq n$.

Propiedades de $P_{n,f,x_0}(x)$

1. $P_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0)$
2. $\forall i = 1, \dots, n$, $P_{n,f,x_0}^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$

Si $P_{n,f,x_0}(x)$ es el polinomio de Taylor de orden n de f en el punto x_0, entonces el resto /residuo/ término complementario de $P_{n,f,x_0}(x)$ es:

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x) .$$

Teorema de Taylor

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función
$n \in \mathbb{N}$
$x_0 \in \mathrm{Dom} f$
$f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ son continuas en un entorno de x_0
$\exists f^{(n+1)}$ entre x y x_0

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ entre x y x_0 tq.

$$\boxed{f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + R_{n,f,x_0}(x)}$$ Fórmula de Taylor

$$\text{i } R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

↳ "Expresión / Fórmula de Lagrange del resto de $P_{n,f,x_0}(x)$"

$$\begin{cases} \text{si } x < x_0 \longrightarrow c \in [x, x_0] \\ \phantom{\text{si }} x > x_0 \longrightarrow c \in [x_0, x] \end{cases}$$

Ex. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $x = 1'1$.

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$P_{2,f,1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

$$R_{2,f,1}(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3 = \frac{\frac{\cancel{2}}{c^3}}{3 \cdot \cancel{2}}(x-1)^3 = \frac{(x-1)^3}{3c^3} \quad \text{con } c \text{ entre } 1 \text{ y } x.$$

$$\ln(1'1) = f(1'1) \simeq P_{2,f,1}(1'1) = -\frac{(1'1)^2}{2} + 2 \cdot 1'1 - \frac{3}{2} = 0'095$$

error:

$$|R_{2,f,1}(x)| = \frac{(1'1-1)^3}{3c^3} = \frac{0'1^3}{3c^3} \quad \text{con } c \text{ entre } 1 \text{ y } 1'1$$

$$1 \leq c \leq 1'1$$

$$\frac{1}{1'1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1'1^3} \leq \frac{1}{c^3} \leq 1$$

$$\Rightarrow |R_{2,f,1}(x)| = \frac{0'1^3}{3c^3} \leq \frac{0'1^3}{3} \cdot 1 = 3'\overline{3} \cdot 10^{-4} \simeq 0'0003\dots$$

$\uparrow$
$\frac{1}{c^3} \leq 1$

$$\lim_{x\to x_0} R_{n,f,x_0}(x) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Aproximación polinómica de funciones y acotación del error

en la hipótesis del Teorema de Taylor, si ademas $f^{(n+1)}(x)$ es continua entre x y x_0 (en $[x,x_0]$ o en $[x_0,x]$) $\Rightarrow$ $\exists M_{n+1}$ máximo absoluto de

Teorema de Weierstrass

$f^{(n+1)}$ (en $[x,x_0]$ o en $[x_0,x]$ $\Rightarrow$ para cada x próximo a x_0:

$$|f(x) - P_{n,f,x_0}(x)| = |R_{n,f,x_0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \boxed{\frac{|M_{n+1}|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}$$

cota superior del error de la aproximación $f(x) \simeq P_{n,f,x_0}(x)$

siendo $M_{n+1} = \max\limits_{\substack{x\in[x_0,x]\\ x\in[x,x_0]}} \{f^{(n+1)}(x)\}$

Tipos de ejercicios
- fijado n, calcular cota del error.
- fijada una presición, calcular n y calcular la aproximación de $P_{n,f,x_0}(x)$.

1. Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x) = \ln(1-x)$ per obtenir el valor de $\ln 0'75$ amb error més petit que 10^{-3}.

$\ln(0'75) = \ln(1-0'25) = f(0'25) \simeq P_{n,f,0}(0'25) \longrightarrow$

$\longrightarrow |\text{error}| = |R_{n,f,0}(0'25)| = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(0'25-0)^{n+1}$ con c entre 0 y $0'25$.

1º) Se expresa el error (calculando la $f^{(n+1)}(c)$).

$f(x) = \ln(1-x)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$f''(x) = \dfrac{0\cdot(1-x) - 1(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$f'''(x) = \dfrac{0(1-x)^2 - 1\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \dfrac{2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \dfrac{2!}{(1-x)^3}$

$f^{IV}(x) = \dfrac{0\cdot(1-x)^3 - 2\,3\cdot(1-x)^2\cdot(-1)}{(1-x)^6} = \dfrac{2\cdot 3\,\cancel{(1-x)^2}}{(1-x)^{\cancel{6}\,4}} = \dfrac{2\cdot 3}{(1-x)^4} = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

$$|\text{error}| = |R_{n,f,0}(0'25)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0-0'25)^{n+1} \right| = \frac{\frac{((n+\cancel{1})-\cancel{1})!}{(1-c)^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot 0'25^{n+1} =$$

$$= \frac{\frac{n!}{(1-c)^{n+1}}}{(n+1)!} \cdot 0'25^{n+1} = \frac{n! \cdot 0'25^{n+1}}{(n+1)! \cdot (1-c)^{n+1}} = \frac{\cancel{n!} \cdot 0'25^{n+1}}{(n+1)\cdot \cancel{n!} \cdot (1-c)^{n+1}} =$$

$$= \frac{0'25^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}}$$

2°) Usando que $0 < c < 0'25$, se acota el error por una expresión que no contenga c.

$$0 \leq c \leq 0'25$$

$$1-0 \geq 1-c \geq 1-0'25$$

$$0'75 \leq 1-c \leq 1$$

$$\frac{1}{1} \leq \frac{1}{1-c} \leq \frac{1}{0'75}$$

$$1 \leq \frac{1}{(1-c)^{n+1}} \leq \frac{1}{0'75^{n+1}}$$

$$\Rightarrow |\text{error}| = \frac{0'25^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}} \leq \frac{0'25^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{0'75^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{0'25}{0'75}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

3°) Se impone que esto último es $< 10^{-3}$ y se calcula n.

$$|\text{error}| < \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$$

imponemos que $\dfrac{1}{(n+1)\cdot 3^{n+1}} < 10^{-3}$.

Como no se puede despejar n:

$$n=5 \longrightarrow |\text{error}| = \frac{1}{(5+1)\cdot 3^{5+1}} = \frac{1}{6\cdot 3^6} \simeq 2'28\cdot 10^{-4} < 10^{-3}$$

$$n=4 \longrightarrow |\text{error}| = \frac{1}{(4+1)\cdot 3^{4+1}} = \frac{1}{5\cdot 3^5} \simeq 8'23\cdot 10^{-4} < 10^{-3}$$

$$n=3 \longrightarrow |\text{error}| = \frac{1}{(3+1)\cdot 3^{3+1}} = \frac{1}{4\cdot 3^4} \simeq 3'09\cdot 10^{-3} > 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{n \geq 4}$$

3. Doneu una cota superior de l'error en la fòrmula $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$ mitjançant la fórmula de Taylor de e^x.

$f(x) = e^x$

$f'(x) = f''(x) = \dots = f^n(x) = e^x$.

$x_0 = 0 \longrightarrow f(0) = e^0 = 1 = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)$

$e = f(1) \approx P_{n,f,0}(1) = f(0) + f'(0)(1-0) + \frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(1-0)^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}(1-0)^4 =$

$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$

$|error| = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} \cdot (1-0)^5 = \frac{e^c}{5!}$ con c entre 0 y 1.

$0 \leq c \leq 1$.

$e^0 \leq e^c \leq e^1 = e$

$\Rightarrow |error| = \frac{e^c}{5!} \leq \frac{1}{5!} \cdot e = \frac{e}{5!} \simeq \boxed{0'0227}$

5. Sigui $f(x) = \sqrt{1+x}$

a) Obteniu el desenvolupament de Taylor de grau dos de la funció $f(x)$ en $x = 0$.

$P_{2,f,0}(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$

$f(x) = \sqrt{1+x} \longrightarrow f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}} \longrightarrow f''(0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}$

$\Rightarrow \boxed{P_{2,f,0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2}$

b) Fent ús del polinomi de l'apartat a), calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1'02}$.

$$\sqrt{1'02} = \sqrt{1+0'02} = f(0'02) \simeq P_{2,f,0}(0'02) = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0'02 - \frac{1}{8}\cdot 0'02^2 = \boxed{1'00995}$$

c) Doneu una fita superior de l'error comès en el càlcul de l'apartat b).

$$|error| = |R_{2,f,0}(0'02)| = \frac{|f'''(c)|}{3!}\cdot(0'02-0)^3 \quad \text{con } c \text{ entre } 0 \text{ y } 0'02.$$

$$|error| = \frac{\frac{3}{8\sqrt{(1+c)^5}}}{3!}\cdot 0'02^3 = \frac{\cancel{3}\cdot 0'02^3}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 8\sqrt{(1+c)^5}} = \frac{0'02^3}{16\sqrt{(1+c)^5}}$$

$$0 \leq c \leq 0'02$$

$$1+0 \leq 1+c \leq 1+0'02$$

$$\frac{1}{1'02} \leq \frac{1}{1+c} \leq \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1'02^5}} \leq \frac{1}{\sqrt{(1+c)^5}} \leq \frac{1}{\sqrt{1^5}} = 1$$

$$\Rightarrow |error| = \frac{0'02^3}{16\sqrt{(1+c)^5}} = \frac{0'02^3}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^5}} \leq \frac{0'02^3}{16}\cdot 1 = \boxed{5\cdot 10^{-7}}$$

4. Calculeu el valor aproximat del volum d'una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, si el radi val $r = 2'5\text{ cm} \pm 0'05\text{ cm}$ i π es representa exactament. Doneu una fita superior de l'error comès en l'aproximació (Fórmula general de propagació de l'error).

Valor aproximado de $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ si $r = 2'5\text{ cm} \pm 0'05\text{ cm}$ y π representado exactamente.

$$r = 2'5\text{cm} \pm 0'05\text{cm} \Rightarrow \begin{cases} r \simeq 2'5\text{cm} = \bar{r} \\ \text{error absoluto } |r-\bar{r}| = |r-2'5| \leq 0'05\text{cm}. \end{cases}$$

$$V \simeq \frac{4}{3}\pi\cdot 2'5^3 = \boxed{65'45\text{ cm}^3}$$

Fórmula de la propagación del error

x = nº real exacto.

$\bar{x}$ = aproximación de x.

Para calcular $f(x)$ calculamos $f(\bar{x})$.

$$f(x) \simeq P_{1,f,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(\bar{x}) \simeq f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \Rightarrow \boxed{\underbrace{|f(x)-f(\bar{x})|}_{\text{error en el resultado}} \simeq |f'(\bar{x})|\underbrace{|x-\bar{x}|}_{\text{error en el dato}}}$$ fórmula de la propagación del error

4. (continuación).

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot \cancel{3} r^2 = 4\pi r^2 \longrightarrow V'(2'5) = 4\pi \cdot 2'5^2$$

$$|V(r) - V(2'5)| \simeq V'(2'5)\,|\underbrace{r-2'5}_{\leq\, 0'05\text{cm}}| \leq 4\pi \cdot 2'5^2 \cdot 0'05 = \boxed{3'927}$$

5.2. Aplicaciones de la fórmula de Taylor: cálculos de extremos y estudio local de funciones. Fórmula de propagación del error.

$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ \bar{x} \text{ aproximación de } x \end{array}\right\}$ para hacer un cálculo de $f(x)$ se hace de $f(\bar{x})$.

$$\begin{cases} \text{si } f'(\bar{x}) \neq 0 \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq |f'(\bar{x})|\,|x-\bar{x}| \\ f'(\bar{x}) = 0 \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \dfrac{|f^{(n)}(\bar{x})|}{n!}|x-\bar{x}|^n \end{cases}$$

siendo n el orden de la primera derivada que es diferente de 0 en el $\bar{x}$.

Supongamos que $f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \dots = f^{(n-1)}(\bar{x}) = 0$ y $f^{(n)}(\bar{x}) = 0$ (con ≥ 2)

$$\Rightarrow f(x) \simeq P_{2,f,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x-\bar{x})^n$$

$$\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \simeq \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x-\bar{x})^n$$

Infinitésimo

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función, $a \in \mathbb{R}$ $\Big\}$ $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0$.

$f(x)$ y $g(x)$, dos infinitésimos en $a \Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ \text{nº real} \\ \infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \Rightarrow f(x) \text{ es un infinitésimo de orden superior a } g(x) \text{ en } a. \\ \text{nº real} \Rightarrow f(x) \text{ y } g(x) \text{ son infinitésimos del mismo orden} \\ \quad \circledast \text{ si } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x) \text{ y } g(x) \text{ son equivalentes.} \\ \infty \Rightarrow g(x) \text{ es de orden superior a } f(x) \text{ en } a. \end{cases}$$

$f(x)$ infinitésimo en $x = a$ $\left(\lim_{x \to a} f(x) = 0 \right)$

$f(x)$ es un infinitésimo de orden n en $x = a \iff \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ex. $f(x) = \sin x$ es de orden 1 en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{(x-0)^1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ \quad x \longrightarrow f(x) \\ a \in \mathrm{Dom}\, f \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) - a \text{ es un infinitésimo en } x = a.$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists\, f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a) \\ f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ f^{(n)} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(x) \text{ es un infinitésimo de orden } n \text{ en } x = a. \\ \text{y } f(x) - a \sim \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{array}$$

infinitésimo equivalente.

8. Calculeu els límits següents fent ús de la fórmula de Taylor i/o infinitésims equivalents.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\frac{x}{2}}$

• polinomi de Taylor de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

• polinomi de Taylor de $\cos x$: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} + \dots$$

$$\Rightarrow 1 - \cos\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots}{\frac{x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \dots\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^2}{2^4\cdot 4!} + \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \overbrace{\frac{x}{3} + \dots}^{\to 0}}{\frac{1}{2^2\cdot 2!} + \underbrace{\frac{x^2}{2^4\cdot 4!} + \dots}_{\to 0}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = -\frac{8}{2} = \boxed{-4}$$

Cálculo de extremos y estudio local de funciones

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función

$x_0 \in \text{Dom} f$

$\exists f', f'', \dots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ en un entorno de x_0

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,f,x_0}(x).$$

$$\left(R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right)$$

con c entre x_0 y x.

Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos (locales)

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ R_{n,f,x_0}(x).$$

Suponemos que $\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad (n \geq 1) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,f,x_0}(x)$$

- si n es par $\Rightarrow$
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \longrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{\oplus}{\oplus} \cdot \oplus > 0 \Rightarrow$
    $\Rightarrow f(x) > f(x_0)$ $\forall x$ de un entorno de $x_0 \Rightarrow f$ tiene en x_0 un mínimo relativo.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \longrightarrow f(x) - f(x) = \frac{\ominus}{\oplus} \oplus < 0 \Rightarrow$
    $\Rightarrow f(x) < f(x_0)$ $\forall x$ de un entorno de $x_0 \Rightarrow f$ tiene en x_0 un máximo relativo.
- si n es impar $\Rightarrow$
  - $f^{(n)}(x_0) > 0$
    - si $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{\oplus}{\oplus} \oplus > 0 \Rightarrow$
      $\Rightarrow f(x) > f(x_0)$ $\forall x > x_0$ de un entorno de x_0
    - si $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{\oplus}{\oplus} \ominus < 0 \Rightarrow$
      $\Rightarrow f(x) < f(x_0)$ $\forall x < x_0$ de un entorno de x_0

    $\Rightarrow$ f creciente en x_0
  - $f^{(n)}(x_0) < 0$
    - si $x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{\ominus}{\oplus} \oplus < 0 \Rightarrow$
      $\Rightarrow f(x) < f(x_0)$ $\forall x > x_0$ de un entorno de x_0
    - si $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{\ominus}{\oplus} \ominus > 0 \Rightarrow$
      $\Rightarrow f(x) > f(x_0)$ $\forall x < x_0$ de un entorno de x_0

    $\Rightarrow$ f decreciente en x_0

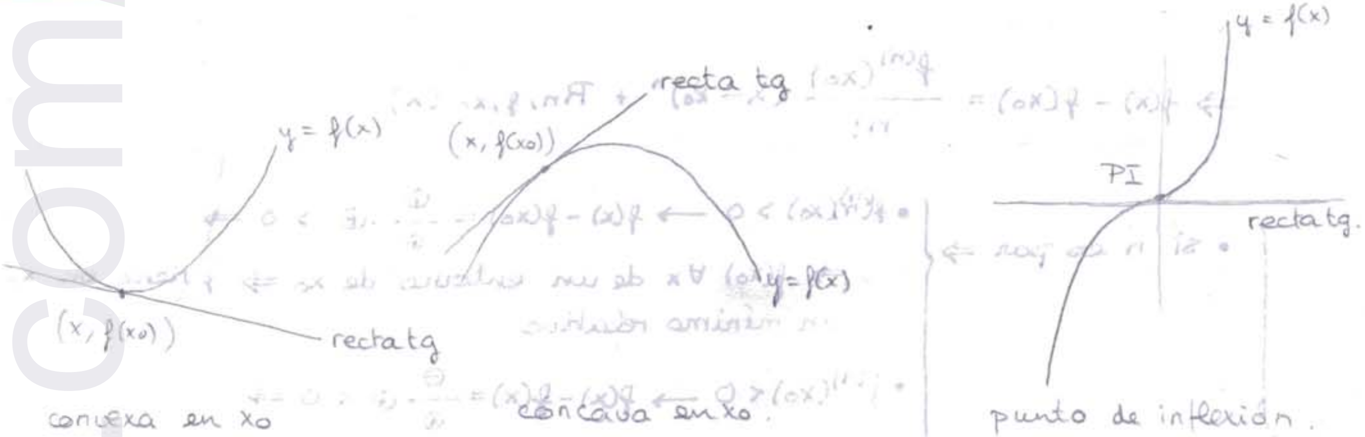
Ex. $f(x) = x^{527}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 527\,x^{526} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots f^{(526)}(0) = 0$$

$$f^{(527)}(0) = 527! > 0 \Rightarrow f \text{ creciente en } x = 0.$$

Concavidad, convexidad y puntos de inflexión



$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n, f, x_0}(x).$$

Suponemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(n)}(x_0) \neq \quad (n \geq 2) \end{array}\right\} \underbrace{f(x)}_{\text{función}} - \underbrace{f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{recta tg.}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n, f, x_0}(x).$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ n \text{ par} \left\{\begin{array}{l} \bullet\ f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > \text{recta tg} \Rightarrow f \text{ convexa en } x_0 \\ \bullet\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < \text{recta tg} \Rightarrow f \text{ cóncava en } x_0 \end{array}\right. \\ \bullet\ n \text{ impar} \left\{\begin{array}{l} \bullet\ f^{(n)}(x_0) > 0 \\ \bullet\ f^{(n)}(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene un PI en } x_0. \end{array}\right.$$