8.1. Derivadas parciales y direccionales: Definición. Interpretación geométrica.

vector gradiente

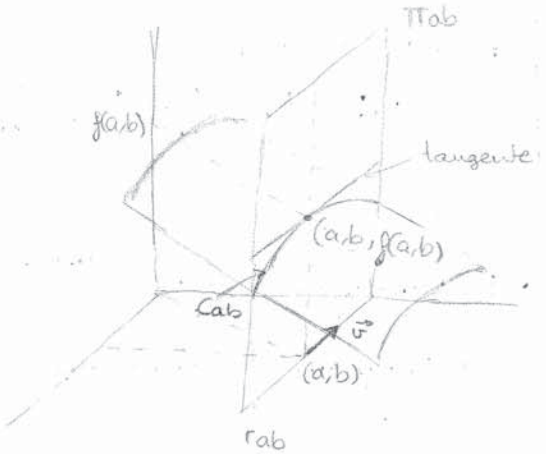
$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$

$(a,b) \in \mathrm{Dom}\, f$.

$\vec{v} = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$



r_{ab} = recta del plano Oxy $(z=0)$ que $\begin{cases} \text{pasa por } (a,b) \\ \text{tiene vector director } \vec{v} \end{cases}$

Π_{ab} = plano que $\begin{cases} \text{contiene } r_{ab} \\ \text{es } \perp \text{ a } z \end{cases}$

C_{ab} = curva de $\cap$ de Π_{ab} con $z = f(x,y)$.

1. La derivada de f en el punto (a,b) según el vector $\vec{v}$ es la pendiente de la recta (del plano Π_{ab}) tangente a la curva C_{ab} en el punto (a,b).

$$D_{\vec{v}}\, f(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b) + t\vec{v}) - f(a,b)}{t}$$

2. $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a,b) \in \mathrm{Dom}\, f \\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2,\ \vec{v} \neq 0 \end{array}\right\}$ Si $|\vec{v}| = 1$ $\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1\right) \Rightarrow D_{\vec{v}}\, f(a,b)$ es la derivada direccional de f en (a,b) según la dirección del vector $\vec{v}$.

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow f(\vec{x}) \\ \vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Dom}\, f \\ \vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} = 1 \end{array}\right\}$ la derivada direccional de f en el punto $\vec{a}$ según la dirección del vector $\vec{v}$ es:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((\vec{a}) + t\vec{v}) - f(\vec{a})}{t} = D_{\vec{v}}\, f(\vec{a})$$

Ex. $z = \text{arctg} \frac{\ }{x}$ en el punto $(1,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + \frac{y^2 \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}} = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{-1}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x + \frac{y^2 \cdot \cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}} = \frac{1}{x+\frac{y^2}{x}} = \frac{x}{x\left(x+\frac{y^2}{x}\right)} =$$

$$= \frac{x}{x^2 + \frac{y^2 \cancel{x}}{\cancel{x}}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}.$$

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{a} \in \overset{\circ}{\text{Dom} f} \end{array}\right\} \Rightarrow$ el vector gradiente de f en el punto $\vec{a}$ es:

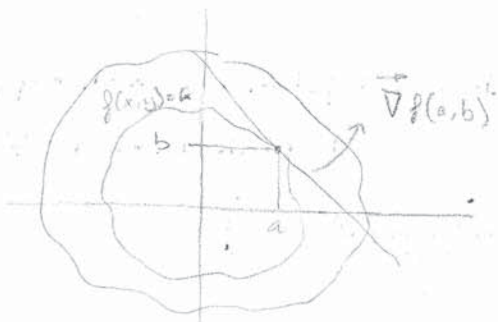
$$\vec{\nabla} f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right).$$

Ex. $z = \text{arctg} \frac{y}{x}$ en el punto $(1,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}_z(1,1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

si $n=2$

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \longrightarrow f(x,y) \\ \vec{a} = (a,b) \in \overset{\circ}{\text{Dom} f} \\ \text{Suposem que } f(a,b) = k \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$ es el vector normal a la curva de nivel $f(x,y)=k$ en (a,b).



El vector $\vec{N} = (A, B, C)$ 

Recta normal a una superficie en un punto.

Si la recta r pasa por $P = (a, b, c)$
y tiene vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
$v_1, v_2, v_3 \neq 0$
$\Rightarrow$ Ecuación contínua de la recta:

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

Alternativa: ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \lambda v_1 \\ y = b + \lambda v_2 \\ z = c + \lambda v_3 \end{array}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

Ex. recta normal a la gráfica de $f(x,y) = x^2 y + x y^3$ en $(1, 2, 10)$.

- vector director: vector normal al plano tangente.

$$z = 12x + 13y - 28 \Leftrightarrow 12x + 13y - z - 28 = 0 \Rightarrow \vec{N} = (12, 13, -1)$$

$\star$ Siempre: $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1 \right)$

- recta normal:

$$\boxed{\frac{x-1}{12} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-10}{-1}}$$

Para más de dos variables:

Diremos que f es diferenciable en $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, si existe el "hiperplano tangente" en $(\vec{a}, f(\vec{a}))$

$$z = f(\vec{a}) + p_1(x_1 - a_1) + p_2(x_2 - a_2) + \dots + p_n(x_n - a_n).$$

donde: $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$

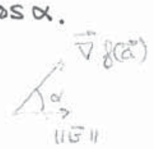
si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ son contínuas en $\vec{a}$, entonces f es diferenciable en $\vec{a}$.

si f es diferenciable en $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, entonces:

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$$

$\|\vec{v}\| = 1$ ($\vec{v}$ unitario).

$D_{\vec{u}}\, f(\vec{a}) = \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \cdot \underset{\substack{\| \\ 1}}{\|\vec{u}\|} \cdot \cos\alpha = \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \cdot \cos\alpha.$



($D_{\vec{u}}\, f(\vec{a})$ es máximo cuando

la derivada direccional máxima de f en a es $\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\|$ y además la dirección (y sentido) en que eso ocurre es la de $\vec{\nabla} f(a)$.

Para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la derivada direccional es 0.

1. Escriu l'equació del tangent i de la recta normal a:

a) la superfície $z = x^2 + y^2$ en el punt $(1,2,5)$.

- $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$

  $\hookrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 2 \cdot 1 = 2 = p$

- $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$

  $\hookrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 2 \cdot 2 = 4 = q$

- Plano tangente: $z = f(1,2) + p\,(x-1) + q\,(y-2) = (1+4) + 2(x-1) + 4(y-2) =$

  $= 5 + 2x - 2 + 4y - \underset{8}{8} = \boxed{2x + 4y - 5}$

- $\vec{N} = (2, 4, -1)$

- recta normal:

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}}$$

3. Determineu els valor d'a, b i c tals que la derivada direccional de la funció: $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punt $(1,2,-1)$, tingui el valor màxim de 64 en una direcció paral·lela a l'eix OZ.

- la derivada direccional es máxima en la dirección $(0,0,1)$. y su valor es 64.

- El gradiente debe tener la dirección de $\vec{v} = (0,0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = ay^2 + 3c\ {}^{2}\ {}^{2} \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) = 4a + 3c \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2axy + bz \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = 4a - b \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z} = by + 2cx^3z \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = 2b - \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(1,2,-1) = (4a+3c,\ 4a-b,\ 2b-2c)$$

* derivada direccional màxima $\Rightarrow \cos\alpha = 1$.

$\hookrightarrow D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \cdot \cos\alpha$.

$\Rightarrow D_{\vec{v}} f(\vec{a})$ és máxima si $D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = \|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| = 64 . \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|(0,0,2b-2c)\| = 64 \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} 4a + 3c = 0 \\ 4a - b = 0 \\ 2b - 2c = 1 \cdot 64 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{array}$$