2. SUCESIONES DE NÚMEROS NATURALES

2.1. Sucesiones numéricas: definición. Límite de una sucesión. Propiedades algebraicas. Indeterminaciones.

Una sucesión de números reales es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

notación: el conjunto imagen: "conjunto de términos de la sucesión":

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq 1}$.

La imagen del 1: a_1 "primer término de la sucesión"

a_n: término general de la sucesión o término n-ésimo de la sucesión.

Ejemplo 1: $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longrightarrow a_n = n$ — sucesión divergente

$(1, 2, 3, 4, \dots)$

Ejemplo 2: $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longrightarrow a_n = (-1)^n$ — sucesión oscilante

$(-1, 1, -1, 1, \dots)$

Ejemplo 3: $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longrightarrow a_n = \frac{1}{n}$ — sucesión convergente o decreciente

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

Ejemplo 4: $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longrightarrow a_n = (-1)^n \cdot n$

$(-1, 2, -3, 4, \dots)$

Formas frecuentes de dar una sucesión

1. Dando el término general: $a_n = 2n$.
2. Dando los primeros términos de la sucesión: $2, 4, 6, 8, \dots$
3. por recurrencia: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 2 + a_{n-1}, \ n \geq 2. \end{cases}$

Límite de una sucesión

$\left.\begin{array}{l} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión de números reales} \\ l \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow l$ es el límite de la sucesión $(a_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $|a_n - l| < \varepsilon$.

$l = \lim a_n$ $\qquad$ $l = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

$a_n \to l$ $\qquad$ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

(a_n) sucesión de números reales es convergente $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}$ tq. $l = \lim a_n$

Propiedades

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales convergente $\Rightarrow$ su límite es único.
2. $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ dos sucesiones de números reales convergentes.
   si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq b_n \Rightarrow \lim a_n \leq \lim b_n$.
3. Teorema de compresión (del sandwich)
   $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$. 3 sucesiones de números reales.

$$\left.\begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq. } \forall n \geq n_0,\ a_n \leq b_n \leq c_n. \\ (a_n), (c_n) \text{ son convergentes y } \lim a_n = \lim c_n = l \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (b_n)$ es convergente y $\lim b_n = l$.

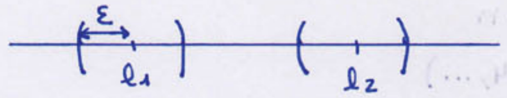
$$a_n \leq b_n \leq c_n \to l$$

Demostración

1. (a_n) sucesión de números reales convergente.
   Demostración por reducción al absurdo (RA).
   Suponemos que $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ son límites de a_n.
   Veremos que $l_1 = l_2$.

   Por ser l_1, l_2, límites de a_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists n_{1\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tq. } \forall n \geq n_{1\varepsilon}, & |a_n - l_1| < \varepsilon. \\ \exists n_{2\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tq. } \forall n \geq n_{2\varepsilon}, & |a_n - l_2| < \varepsilon. \end{cases}$$



tomando $\varepsilon < \dfrac{|l_1 - l_2|}{2}$

$n_\varepsilon = \max\{n_{1\varepsilon}, n_{2\varepsilon}\}$

$\forall n \geq n_\varepsilon$, $a_n \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$.

y si $l_1 \neq l_2 \Rightarrow (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \cap (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) = \emptyset$

CONTRADICCIÓN

Definiciones

1. $(a_n)_n$ sucesión de números reales. El límite de a_n es $+\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists n_M \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_M,\ a_n > M$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

$a_n \longrightarrow +\infty$

2. $\lim a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists n_M \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_M,\ a_n < -M$.

3. $\lim a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists n_M \in \mathbb{N}$ tq. $\forall n \geq n_M,\ |a_n| > M$ y (a_n) tiene infinitos
(infinito sin signo)
términos positivos e infinitos términos negativos.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_1, n_2 > n$ y $a_{n_1} > 0$ y $a_{n_2} < 0$.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión:

- Convergente: $\exists l \in \mathbb{R}$ tq. $\lim a_n = l$.
- Divergente: $\lim a_n = +\infty, -\infty, \infty$

$\}$ $\exists \lim a_n$

- Oscilante: $\nexists \lim a_n$.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. divergente hacia $+\infty$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$. divergente hacia $-\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot n = \infty$. divergente hacia ∞ (sin signo).
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. convergente hacia 0.
5. $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$. oscilante.
6. $1,1,1,2,1,3,1,4,\ldots$ $\nexists \lim \Rightarrow$ oscilante
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1.\ 2,2^2,2^3,2^4,\ldots \Rightarrow \text{divergente.} \\ 1 & \text{si } a=1.\ 1,1,1,1,1,\ldots \\ 0 & \text{si } -1<a<1 \\ \nexists & \text{si } a=-1.\ -1,1,-1,1,\ldots \Rightarrow \text{oscilante} \\ \infty \text{ (sin signo)} & \text{si } a<-1. \Rightarrow \text{divergente.} \end{cases}$

$a \in \mathbb{R}$

(los casos $a=1$ y $-1<a<1$) $\Rightarrow$ convergente

Álgebra de límites

1. límites finitos

si $\lim a_n = a$ i $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$:

- $\lim (a_n \pm b_n) = a + b$
- $\lim (a_n b_n) = ab$
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$, $b_n \neq 0$ $\forall n$.
- $\lim b_n^{a_n} = b^a$ si $b, b_n > 0$ $\forall n$.
- $\lim \log a_n = \log a$ si $a_n, a > 0$ $\forall n$.

2. límites infinitos.

si $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \lim c_n = +\infty$ y $\lim d_n = 0$, $a \in \mathbb{R}$:

- $\lim (a_n \pm b_n) = \pm\infty$
- $\lim (a_n b_n) = \pm\infty$ si $a \neq 0$.
- $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$
- $\lim \frac{b_n}{a_n} = \pm\infty$
- $\lim \frac{d_n}{a_n} = 0$
- $\lim a_n^{b_n} = +\infty$ si $a > 1$.
- $\lim b_n^{a_n} = +\infty$ si $a > 0$.
- $\lim c_n^{b_n} = +\infty$

- $\lim (\pm c_n \pm b_n) = \pm\infty$.
- $\lim (c_n b_n) = +\infty$
- $\lim \frac{a_n}{d_n} = \pm\infty$
- $\lim \frac{b_n}{d_n} = \pm\infty$
- $\lim \frac{d_n}{b_n} = 0$
- $\lim a_n^{b_n} = 0$ si $0 < a < 1$.
- $\lim b_n^{a_n} = 0$ si $a < 0$.
- $\lim c_n^{-b_n} = 0$.

Indeterminaciones

$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty},\ \infty^{0}$

$\boxed{\infty - \infty}$

Generalmente se aplica: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \Leftrightarrow (a-b) = \dfrac{a^2-b^2}{a+b} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}$

otras veces se utiliza: $a_n - b_n = a_n \cdot b_n \left(\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{a_n} \right)$

- $\lim\limits_{\infty - \infty} (3n^2 - 7n) = \lim \underset{\infty}{n}\,(\underset{\infty}{3n-7}) = \infty$

$$= \lim \underset{\infty}{n^2} \left(\underset{3-0}{3 - \frac{7}{n}} \right) = \infty$$

si a_n es un polinomio cualquiera:

$a_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \dots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$

$\lim a_n = \lim n^k \left(c_k + \dfrac{c_{k-1}}{n} + \dots + \dfrac{c_2}{n^{k-2}} + \dfrac{c_1}{n^{k-1}} + \dfrac{c_0}{n^k} \right) = +\infty \cdot c_k \begin{cases} +\infty & \text{si } c_k > 0 \\ -\infty & \text{si } c_k < 0 \end{cases}$

- $\lim (\sqrt{2n} - \sqrt{2n-5}) = \lim \dfrac{(\sqrt{2n})^2 - (\sqrt{2n-5})^2}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-5}} = \lim \dfrac{\cancel{2n} - \cancel{2n} + 5}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-5}} = \lim \dfrac{5}{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-5}} = 0.$

6. Calcula els límits de les successions:

h) $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \sqrt{\dfrac{n+1}{2}} = \lim \dfrac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sqrt{\dfrac{n+1}{2}} = \lim \dfrac{\cancel{n} + 1 - \cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{n+1}{2}} =$

$= \lim \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \left(\lim \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\, n^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\, n^{\frac{1}{2}}} = \lim \dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}\, n^{\frac{1}{2}}} \right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}}$

$\dfrac{p(n)}{q(n)}$
- si grado $p(n) >$ grado $q(n) \Rightarrow \lim = +\infty$ o $-\infty$.
- si grado $p(n) =$ grado $q(n) \Rightarrow \lim =$ cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.
- si grado $p(n) <$ grado $q(n) \Rightarrow \lim = 0$.

sino: dividir numerador y denominador por el término dominante. (simplificar).

• $\lim \dfrac{3n^2+7n}{5n^2-17n+14} \underset{\uparrow \, \frac{\infty}{\infty}}{=} \boxed{\dfrac{3}{5}}$

• $\lim \dfrac{3n^2+7n}{5n^3-3n} \underset{\uparrow \, \frac{\infty}{\infty}}{=} \boxed{0}$

• $\lim \dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n} \underset{\uparrow \, \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \dfrac{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right)}{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)} = \lim \dfrac{\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}-1}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}+1} = \dfrac{0-1}{0+1} = \boxed{-1}$

1. Calculeu els límits de les successions:

a) $\lim \dfrac{6n^3+4n+1}{2n} = \boxed{+\infty}$

b) $\lim \dfrac{n^2-6n-2}{3n^2-9n} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

c) $\lim \left(\sqrt{\dfrac{n+1}{2n+1}}\right)^{\frac{2n-1}{3n-1}} = \left(\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \boxed{\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}}$

6. Calculeu els límits:

c) $\lim \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n} = \lim \dfrac{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)}{\cancel{3^n}\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right)} = \lim \dfrac{\overbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}^{\to 0}+1}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0}-1} = \dfrac{0+1}{0-1} = \boxed{-1}$

$\boxed{1^\infty}$

$\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

de la misma forma: $a_n \to 0 \Rightarrow \lim (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.

por lo tanto: $\left.\begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = \lim (1+a_n-1)^{b_n} = \lim \left[(1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n(a_n-1)} = e^{\lim b_n(a_n-1)}$.

$\left.\begin{array}{l} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n(a_n-1)}$.

• $\lim \left(\dfrac{n^2+n}{n^2-7}\right)^{2n} \underset{\uparrow \, 1^\infty}{=} e^{\lim 2n\cdot\left(\frac{n^2+n}{n^2-7}-1\right)} = e^{\lim 2n\cdot\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}+7}{n^2-7}} = e^{\lim \frac{2n^2+14n}{n^2-7}} = \boxed{e^2}$

$\boxed{0 \cdot \infty}$

Hay dos posibilidades:

1. se pasa a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\underset{0 \cdot \infty}{\uparrow}}{\lim a_n b_n} = \left\{\begin{array}{l} \lim \dfrac{a_n}{\frac{1}{b_n}} \longrightarrow \dfrac{0}{0} \\[2ex] \lim \dfrac{b_n}{\frac{1}{a_n}} \longrightarrow \dfrac{\infty}{\infty} \end{array}\right.$$

2. se pasa a la forma 1^∞:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot a_n} \Rightarrow \lim a_n b_n = \ln\left(\lim (1+a_n)^{b_n}\right)$$

$\boxed{0^0 \ , \ \infty^0}$

Se toman logaritmos y se pasa a la indeterminación $0 \cdot \infty$.

$$0^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \ln a_n$$

$$\infty^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \ln a_n$$

3. Criterios útiles

- criterio de la raiz-cociente: $\left(a_n \neq 0, \ \forall n \geq n_0 \text{ y } \lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell\right) \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$.
- criterio del cociente: $\left(a_n \neq 0, \ \forall n \geq n_0 \text{ y } \lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0$
- criterio de la raiz $\left(\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0$.

6. Calculeu els límits de les successions:

d) $\lim \dfrac{2^n}{n!} = \boxed{0}$ (criterio del cociente)

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim \frac{2^n \cdot (n-1)!}{2^{n-1} \cdot n!} = \lim \frac{2 \cdot \cancel{2^{n-1}} \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{2^{n-1}} \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \lim \frac{2}{n} = 0 < 1$$

4. Calculeu els límits de les successions:

c) $\lim \sqrt[n]{n}$, $\forall n \geq 1$.

$$\lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim \frac{n}{n-1} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim \sqrt[n]{n} = 1} \text{ (criterio de la raiz-cociente).}$$

b) $\lim n^{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \quad (\infty^{\infty} = +\infty \text{ si } \alpha > 0) \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \quad (n^{0} \text{ es la successió } 1,1,1,\dots) \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \quad \left(\underset{\text{si } \alpha<0}{+\infty^{\alpha}} = \dfrac{1}{+\infty^{|\alpha|}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0 \right) \end{cases}$$

3. Feu ús dels criteris de límit zero per calcular:

a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $|a|>1$.

criterio del cociente $\Rightarrow \lim \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim \dfrac{\frac{a^n}{n!}}{\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim \dfrac{a^n \cdot (n-1)!}{a^{n-1} \cdot n!} =$

$$= \lim \frac{a \cdot \cancel{a^{n-1}} \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{a^{n-1}} \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}} = \lim \frac{|a|}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \boxed{\lim \frac{a^n}{n!} = 0}$$

2.2. Sucesiones acotadas. Sucesiones monótonas. Teorema de la convergencia monótona. El número e.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales es una sucesión acotada $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{|a_n| \le k}_{-k \le a_n \le k} \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{R}$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \le a_n \le l$.
- sucesión acotada superiormente $\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le l$.
- sucesión acotada inferiormente $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tq. $\forall n \in \mathbb{N}$, $k \le a_n$
- sucesión monótona $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $(a_{n+1} - a_n)$ tienen todos el mismo signo.
  - creciente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le a_{n+1}$
  - decreciente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge a_{n+1}$
  - estrictamente creciente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$
  - estrictamente decreciente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$

Ejemplos:

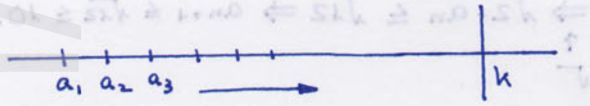
1. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \le (-1)^n \le 1 \rightarrow$ sucesión no monótona.
2. $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. acotada inferiormente $(\inf (n)_{n\in\mathbb{N}} = 1)$. $\rightarrow$ Sucesión estrictamente creciente
3. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada $(\inf = 0,\ \sup = 1) \rightarrow$ sucesión estrictamente decreciente.
4. $(-2)^n$ sucesión no acotada $\rightarrow$ sucesión no monótona.

Teorema de la convergencia monótona

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales.

1. si $\left\{\begin{array}{l} (a_n) \text{ está acotada superiormente (inferiormente)} \\ \text{y} \\ (a_n) \text{ es creciente (decreciente)} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n)$ es convergente y $\lim a_n = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ (inf)

2.



Ejemplo:

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\geq 1$.

Veremos que es convergente y calcularemos su $\lim\limits_{n\to+\infty}$

$a_1=\sqrt{2}$

$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

(1) La sucesión es creciente $\forall n$, $a_n\leq a_{n+1}$

demostración por inducción.

1. pas base $(n=1)$

$a_1\leq a_2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\leq\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Cert.

2. pas inductiu

tenemos: $a_n\leq a_{n+1}$

queremos: $a_{n+1}\leq a_{n+2}$

HI: $a_n\leq a_{n+1} \underset{+2}{\Rightarrow} 2+a_n\leq 2+a_{n+1} \underset{\sqrt{}}{\Rightarrow} \sqrt{2+a_n}\leq\sqrt{2+a_{n+1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1}\leq a_{n+2}$. Cert.

(2) La sucesión está acotada superiormente.

- $\forall n$ $a_n\leq 2$.

demostración por inducción.

1. pas base $(n=1)$

$a_1\leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\leq 2$.

2. pas inductiu

tenemos: $a_n\leq 2$.

queremos: $a_{n+1}\leq 2$.

HI: $a_n\leq 2 \underset{+2}{\Rightarrow} 2+a_n\leq 2+2 \underset{\sqrt{}}{\Rightarrow} \sqrt{2+a_n}\leq\sqrt{4} \Rightarrow a_{n+1}\leq 2$. Cert.

- $\forall n,\ a_n \leq 10.$

<u>demostración</u> por inducción.

1. pas base $(n=1)$

$a_1 \leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 10.$ cert.

2. pas inductiu

tenemos: $a_n \leq 10.$

queremos: $a_{n+1} \leq 10.$

$$HI:\ a_n \leq 10 \xRightarrow{+2} 2+a_n \leq 2+10 \xRightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{12} \Rightarrow a_{n+1} \leq \sqrt{12} \leq 10. \text{ cert.}$$

2. a) Enuncieu el criteri del sandvitx aplicat a successions que acompleixen:

$a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Dadas tres sucesiones de números reales: $(a_n)(b_n)$ y (c_n).

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } a_n \leq b_n \leq c_n,\ \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \\ \text{y } \lim a_n = \lim c_n = l \end{array}\right\} \Rightarrow (b_n) \text{ es convergente y } \lim b_n = l.$$

b) Feu servir aquest criteri per trobar, si és possible, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ on el terme general $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\lim\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{el más grande}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{el más pequeño.}}\right) = \boxed{1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}}_{\downarrow\ 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}}_{\downarrow\ 1}$$

Ejemplo (continuación)

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por: $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $\forall n\geq 1$.

(a_n) creciente y acotada superiormente $\Rightarrow (a_n)$ convergente $\Rightarrow \exists \lim a_n \in \mathbb{R}$.

- Cálculo del límite de a_n.

sea $\lim a_n = l \Rightarrow \lim a_{n+1} = l$.

por definición de la sucesión: $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

$$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n} \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n} \Rightarrow l=\sqrt{2+l} \Rightarrow l^2 = 2+l \Rightarrow l^2-l-2=0$$

$$l=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \quad \begin{cases} l_1=\frac{4}{2}=2 \\ \cancel{l_2=\frac{-2}{2}=-1} \text{ pq. no puede ser } \begin{cases} a_1=\sqrt{2} \\ (a_n) \text{ creciente.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{\lim a_n = 2}$$

5. Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1=\frac{-2}{3}$ i $3a_{n+1}=2+a_n^3$.

$$(a_n)\begin{cases} a_1=-\frac{2}{3} \\ 3a_{n+1}=2+a_n^3 \Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{2+a_n^3}{3} \end{cases}$$

a) Proveu que $-2\leq a_n\leq 1$, per a tot $n\geq 1$.

demostración por inducción.

1. pas base $(n=1)$

$$-2\leq a_1\leq 1 \Leftrightarrow -2\leq -\frac{2}{3}\leq 1 \text{ . cert.}$$

2. pas inductiu

tenemos: $-2\leq a_n\leq 1$.

queremos: $-2\leq a_{n+1}\leq 1$.

$$\text{HI}: -2\leq a_n\leq 1 \underset{\text{elevando al cubo}}{\Rightarrow} (-2)^3\leq a_n^3\leq 1^3 \Rightarrow -8\leq a_n^3\leq 1 \underset{+2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2-8\leq 2+a_n^3\leq 2+1 \Rightarrow -6\leq 2+a_n^3\leq 3 \underset{:3}{\Rightarrow} \frac{-6}{3}\leq\frac{2+a_n^3}{3}\leq\frac{3}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\leq\frac{2+a_n^3}{3}\leq 1 \Rightarrow -2\leq a_{n+1}\leq 1 \text{ . Cert.}$$

b) Proveu que $\{a_n\}$ és

demostración por inducción.

1. pas base $(n=1)$

$$a_1\leq a_2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq\frac{2+a_1^3}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq\frac{2+\left(\frac{-2}{3}\right)^3}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq\frac{2-\frac{8}{27}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq\frac{\frac{54-8}{27}}{3}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\leq\frac{46}{81} \text{ cert.}$$

2. pas inductiu.

tenemos: $a_n \le a_{n+1}$

queremos: $a_{n+1} \le a_{n+2}$

HI: $a_n \le a_{n+1} \underset{\text{elevando al cubo}}{\Rightarrow} a_n^3 \le a_{n+1}^3 \underset{+2}{\Rightarrow} 2+a_n^3 \le 2+a_{n+1}^3 \underset{:3}{\Rightarrow} \frac{2+a_n^3}{3} \le \frac{2+a_{n+1}^3}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} \le a_{n+2}$. Cert.

c) Proveu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

(a_n) creixent

(a_n) acotada superiorment $\Big\} \underset{\text{Teorema de la convergencia monótona.}}{\Rightarrow} (a_n)$ convergent.

Cálculo del límite de a_n.

(a_n) convergente $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{R}$ tq. $\lim a_n = l$.

$\lim a_n = l \Rightarrow \lim a_{n+1} = l$.

por definición de (a_n): $a_{n+1} = \frac{2+a_n^3}{3} \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim \frac{2+a_n^3}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow l = \frac{2+l^3}{3} \Rightarrow 3l = 2+l^3 \Rightarrow l^3 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0=R} \end{array}$$

$\Rightarrow (l-1)(l^2+l-2) = 0 \begin{cases} l_1 = 1 \\ l^2+l-2=0 \end{cases}$

$l = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\left\langle \begin{array}{l} l_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ l_3 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \end{array} \right.$

$\Rightarrow l = 1$ ó $\cancel{l = -2} \Rightarrow \boxed{l = \lim a_n = 1}$

$\downarrow$

pq. $a_1 = -\frac{2}{3}$

i (a_n) creixent