Definiciones

- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto $\Leftrightarrow A = \mathring{A} \Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow Fr(A) \subseteq A$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado $\Leftrightarrow \exists \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\exists r > 0$ tq. $A \subseteq B(\vec{x}, r)$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto compacto $\Leftrightarrow$ A es cerrado y acotado.

1. Considereu els conjunts:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2,\ y \neq 0,\ x \in [-2,2]\}$.

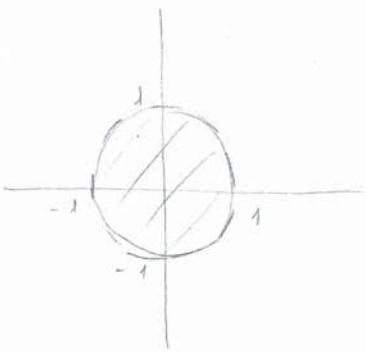
a) dibuixeu aquests conjunts.

b) Trobeu la frontera, l'interior i l'adherència.

c) Són conjunts oberts, tancats o compactes?

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

a) $x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow$ circumferència de centre $(0,0)$ i radi 1.



b) $Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$\mathring{A} = A$

$\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $\mathring{A} = A \Leftrightarrow$ A es un conjunto abierto.

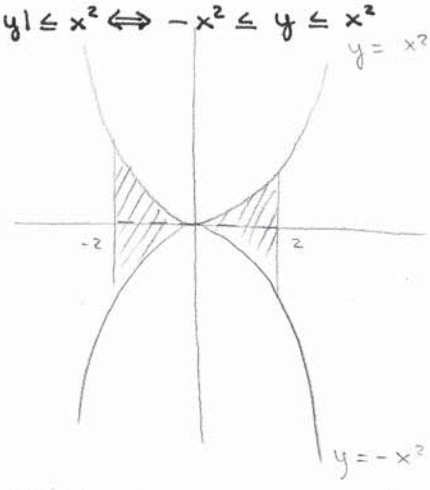
$\bar{A} \neq A \Leftrightarrow$ A no es un conjunto cerrado.

A no es un conjunto cerrado $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A no es un conjunto acotado.

- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2,\ y \neq 0,\ x \in [-2,2]\}$.

a) $|y| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq y \leq x^2$



b) $Fr(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2,\ x \in [-2,2]\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2,\ x \in [-2,2]\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2,\ y \in [-4,4]\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2,\ y \in [-4,4]\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0,\ x \in [-2,2]\}$.

$\mathring{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < x^2,\ y \neq 0,\ x \in]-2,2[\}$.

$\bar{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq x^2,\ x \in [-2,2]\}$.

c) $\mathring{B} \neq B \Leftrightarrow$ B no es un conjunto abierto.

$\bar{B} \neq B \Leftrightarrow$ B no es un conjunto cerrado. $\Rightarrow$ B no es un conjunto compacto.

Bolas abiertas y bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} r \in \mathbb{R},\ r > 0 \\ \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a\ ) \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$ n-bola abierta de centro $\vec{a}$ y radio r:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, d(\vec{x}, \vec{a}) < r\} = B(\vec{a}, r) = B_r(\vec{a}).$$

n-bola cerrada de centro $\vec{a}$ y radio r:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, d(\vec{x}, \vec{a}) \leq r\} = \overline{B}(\vec{a}, r) = \overline{B_r}(\vec{a}).$$

en $\mathbb{R}$

$$B(\vec{a}, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) < r\} = \{x \mid |x-a| < r\} = \,]a-r, a+r[$$

$$|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$$

$$\overline{B}(\vec{a}, r) = [a-r, a+r].$$

en $\mathbb{R}^2$

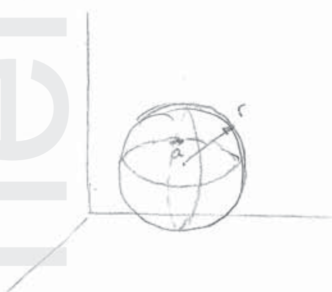
$$B(\vec{a}, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x,y), (a_1, a_2)) < r\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < r\} =$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}$$

$$\overline{B}(\vec{a}, r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a_1)^2 + (y-a_2) \leq r^2\}.$$

* ecuación de la circumferencia en $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{centro } (c_1, c_2) \\ \text{radio } r \end{array}\right\} \Rightarrow (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2.$$

en $\mathbb{R}^3$



sólido esférica abierto/cerrado de centro $\vec{a}$ y radio r.

7.2. Funciones de varias variables: dominio, gráfica, conjuntos de nivel. Funciones continuas.

Una función real de varias variables reales es $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow f(\vec{x})$.

tq. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existe como máximo un $y \in \mathbb{R}$ tq. $f(\vec{x}) = y$.

- Dominio: $\mathrm{Dom} f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq. } f(\vec{x}) = y\} \vee \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \subseteq \mathbb{R}\}$.
- Imagen: $\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } f(\vec{x}) = y\} \vee \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathrm{Dom} f\}$.
- Gráfica: $\mathrm{Gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_n), f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom} f\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
- Conjuntos de nivel:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} \longrightarrow f(\vec{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el conjunto de nivel } k \text{ de la función } f \text{ es: } \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = k\}.$$

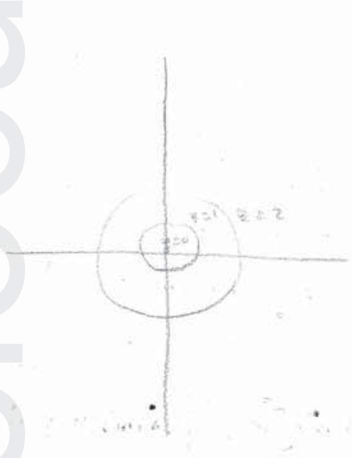
<u>n = 2</u> Curvas de nivel.

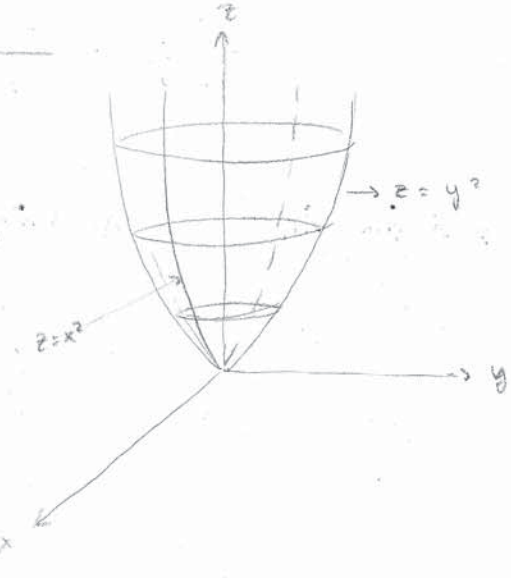
$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) \\ k \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la curva de nivel } k \text{ de } f \text{ es } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = k\}.$$

Ex. $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$z = x^2 + y^2$ superficie de $\mathbb{R}^3$ (paraboloide circular).

curva de nivel k: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = k\}$ $\begin{cases} \text{circumf. de centro } (0,0) \text{ y radio } \sqrt{k} \text{ si } k > 0. \\ \{(0,0)\} \text{ si } k = 0. \\ \emptyset \text{ si } k < 0 \end{cases}$





$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = y^2$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ \quad\;\; = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \quad {}^2$$

2. Trobeu i representeu el domini de les funcions següents:

a) $f(x,y) = \ln(1+xy)$.

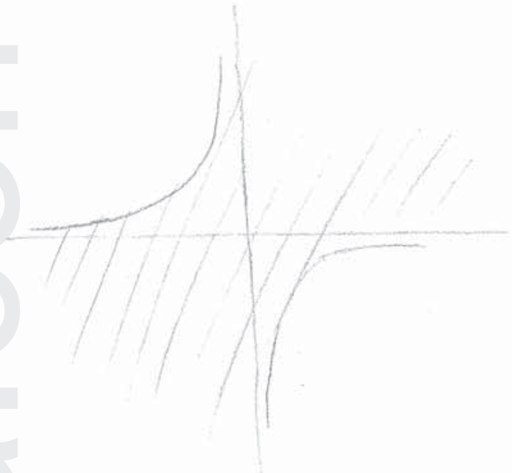
$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\mathrm{Dom}\, f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ln(1+xy) \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+xy > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > -1\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \quad -\frac{1}{x}\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ y < -\frac{1}{x}\}$.



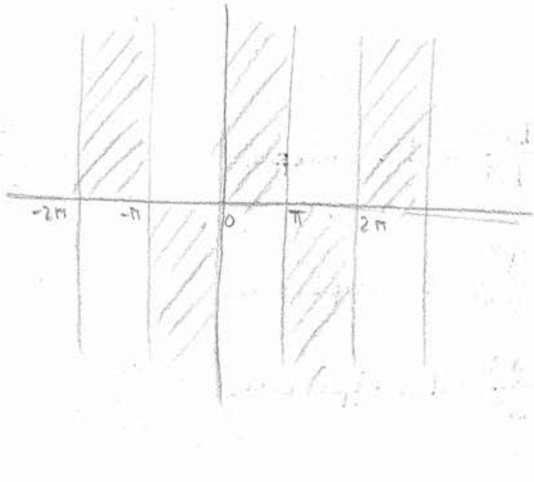
b) $g(x,y) = \sqrt{y \sin x}$

$\mathrm{Dom}\, g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{y \sin x} \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \sin x \quad 0\} =$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0\} =$

$= \{(x,y) \quad \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \wedge x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]\} \cup \{$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \wedge x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\pi, 2k\pi]\}$.



Còniques

Qualsevol lloc geomètric de punts del pla s'expressa per una equació implícitat del tipus:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Circumferència: $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow$ centre $(0,0)$ i radi r // tancat i fitat.
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \rightarrow$ centre (a,b) i radi r
- el·lipse: $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Focus $(\pm c, 0)$, $c^2 = b^2 - a^2$ // tancat i fitat.
- hipèrbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Focus $(\pm c, 0)$, $c^2 = b^2 + a^2$ // tancat.
- paràbola: $y^2 = 2cx \rightarrow$ focus $(\pm c, 0)$ // tancat.
- recta: $y = ax + b$ // tancat

Superfícies

Qualsevol lloc geomètric de punts de l'espai s'expressa per una equació implícita del tipus:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Ezy + Fxz + Gx + Hy + Jz + k = 0 \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

- esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = \mathbb{R}^2$ // tancat i fitat
  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \mathbb{R}^2$
- el·lipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ // tancat i fitat
- cilindre: $x^2 + y^2 = \mathbb{R}^2$ // tancat
- con: $x^2 + y^2 = z^2$
- paraboloide el·líptic: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
- paraboloide hiperbòlic: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
- hiperboloide d'una fulla: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- hiperboloide de dues fulles: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- pla: $ax + by + cz + d = 0$
- recta: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
  (intersecció de dos plans).